

3

费定晖 周学圣 编著
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析

习题集题解

第四版



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

责任编辑 宋 涛 邱 蕾

封面设计 庞 婕 孙 佳

新版推荐

经典 B. П. 吉米多维奇数学习题集系列

数学分析习题集题解 (共六册)

1 分析引论

定价 19.00元

2 单变量函数的微分学

定价 19.00元

3 不定积分 定积分

定价 20.00元

4 级数

定价 19.00元

5 多变量函数的微分法 带参数的积分

定价 22.00元

6 重积分和曲线积分

定价 19.00元

数学分析习题集精选精解

定价 39.00元

数学分析习题集——提示·解题思路·答案

定价 39.00元

高等数学习题精选精解

定价 39.80元

ISBN 978-7-5331-5898-9



9 787533 158989 >

定价：20.00 元

3

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

● 山东科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 3/费定晖, 周学圣编演. —4 版. —济南: 山东科学技术出版社, 2012
ISBN 978-7-5331-5898-9

I. ①吉... II. ①费... ②周... III. ①数学分析—高等学校—题解 IV. ①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120115 号

**Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解 3**

出版者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号
邮编: 250002 电话: (0531) 82098088
网址: www.lkj.com.cn
电子邮件: sdkj@sdpress.com.cn

发行者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号
邮编: 250002 电话: (0531) 82098071

印刷者: 山东新华印刷厂潍坊厂

地址: 潍坊市潍州路753号
邮编: 261031 电话: (0536) 2116806

开本: 787 mm × 1092mm 1/16

印张: 15

版次: 2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5898-9

定价: 20.00 元

第四版前言

DISIBANQIANYAN

本书自 1979 年出版发行以来,历经 30 多个春秋,一直畅销不衰,深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下,对全书我不断地修订和补充,不断地修正错误,不断地替换更为简洁的解法和证明,力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性,以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书,对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练,感到获益匪浅,赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书,对此我们倍感欣慰,鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请,并得到郭大钧教授的大力支持,仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作,以适应文化建设繁荣发展的需要,更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作:

第一,为全书 4462 题中的近三成的习题,根据题型的不同,在原题解的前面,分别或给出提示,或给出解题思路,或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题,怎样下手求解;启发读者怎样总结解题的规律;启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论,开拓视野,活跃思路;帮助读者逐步解决学习中的困难,为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二,根据当前的语言习惯,对全书的文字作了较多的润色,使其表述更加准确,更加简洁凝练。

第三,改正了第三版中的个别印刷错误,修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四,根据国家相关标准,规范了有关术语和数学式子的表达;并对全书使用的外国人名,按照现在的标准或通用译法重新翻译人名,以求统一标准。

第五,对全书的版面和开本重新进行了调整,使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者,懂得只有通过个人的独立思考,加上勤学苦练才能取得成功,“只看不练假把式”,数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的,我们编写本书,就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费定晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979 年于济南

目录 MULU

第三章 不定积分	1
§ 1. 最简单的不定积分	1
§ 2. 有理函数的积分法	36
§ 3. 无理函数的积分法	57
§ 4. 三角函数的积分法	77
§ 5. 各种超越函数的积分法	96
§ 6. 求函数积分的各种例子	107
第四章 定积分	121
§ 1. 定积分是积分和的极限	121
§ 2. 利用不定积分计算定积分的方法	132
§ 3. 中值定理	157
§ 4. 广义积分	162
§ 5. 面积的计算法	186
§ 6. 弧长的计算法	194
§ 7. 体积的计算法	200
§ 8. 旋转曲面表面积的计算法	208
§ 9. 矩的计算法. 质心的坐标	212
§ 10. 力学和物理学中的问题	216
§ 11. 定积分的近似计算法	220

第三章 不定积分

§ 1. 最简单的不定积分

1° 不定积分的概念 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义且连续, $F(x)$ 是它的原函数, 即当 $a < x < b$ 时 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad a < x < b,$$

式中 C 为任意常数.

2° 不定积分的基本性质:

$$(1) \, d\left[\int f(x) dx\right] = f(x) dx;$$

$$(2) \, \int d\Phi(x) = \Phi(x) + C;$$

$$(3) \, \int A f(x) dx = A \int f(x) dx \quad (A \text{ 为常数}, A \neq 0);$$

$$(4) \, \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

3° 最简积分表:

$$\text{I. } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C, \\ -\operatorname{arccot} x + C; \end{cases}$$

$$\text{IV. } \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

$$\text{V. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}$$

$$\text{VI. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C;$$

$$\text{VII. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1); \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\text{VIII. } \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\text{IX. } \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$$

$$\text{XII. } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\text{XIII. } \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x + C;$$

$$\text{XV. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

4° 积分的基本方法

$$(1) \text{ 引入新变量法 若 } \int f(x) dx = F(x) + C,$$

则 $\int f(u) du = F(u) + C$, 式中 $u = \varphi(x)$ 是连续可微函数.

$$(2) \text{ 分项积分法 若 } f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\text{则 } \int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

$$(3) \text{ 代入法 若 } f(x) \text{ 连续, 令 } x = \varphi(t), \text{ 式中 } \varphi(t) \text{ 及其导数 } \varphi'(t) \text{ 皆连续,}$$

$$\text{则得 } \int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

$$(4) \text{ 分部积分法 若 } u \text{ 和 } v \text{ 为 } x \text{ 的可微函数, 则 } \int u dv = uv - \int v du.$$

利用最简积分表,求下列积分*:

【1628】 $\int (3-x^2)^3 dx.$

解 $\int (3-x^2)^3 dx = \int (27-27x^2+9x^4-x^6) dx = 27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C.$

【1629】 $\int x^2(5-x)^4 dx.$

解 $\int x^2(5-x)^4 dx = \int (625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6) dx = \frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C.$

【1630】 $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx.$

解 $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx = \int (1-6x+11x^2-6x^3) dx = x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.$

【1631】 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

解 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right) dx = -\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C.$

【1632】 $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right) dx.$

解 $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right) dx = a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C.$

【1633】 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$

解 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$

【1634】 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}}) dx = \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

【1635】 $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$

解 $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx = \int (x^{-\frac{4}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}) dx = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)+C.$

【1636】 $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\sqrt{x} dx.$

提示 注意 $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\sqrt{x} = x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}.$

1634 题,1635 题,1637 题及 1638 题均可仿本题,将被积函数化成若干个幂函数的代数和,然后再利用分项积分法.

解 $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\sqrt{x} dx = \int (x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}) dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C = \frac{4(x^3+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$

【1637】 $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$

* 本章在叙述习题及其解答过程中,凡出现的函数,无论是被积函数还是原函数,均默认是在有意义的定义域上进行的.例如,最简积分表 I 中当 $n \leq -2$ 时,要求 $x \neq 0$; IV 中要求 $|x| \neq 1$; V 中要求 $|x| < 1$; 以及 VI 中,当取负号时要求 $|x| > 1$,等等,就未加声明.在题解中也有相当多的类似情况.因此,如无特别声明,在一般情况下,这些定义域是很容易被读者确定的,此处就不再予以一一指明.

$$\text{解} \quad \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx = \int (2 - 2\sqrt[5]{72}x^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}) dx = 2x - \frac{12}{5}\sqrt[5]{72x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2} + C.$$

$$\text{【1638】} \quad \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

$$\text{【1639】} \quad \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = x - \arctan x + C.$$

$$\text{【1640】} \quad \int \frac{x^2}{1-x^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx = -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$\text{【1641】} \quad \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-1} \right) dx = x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$\text{【1642】} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

$$\text{【1643】} \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right| + C.$$

$$\text{【1644】} \quad \int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

$$\text{解} \quad \int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

$$\text{【1645】} \quad \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \int \left[2 \left(\frac{1}{5} \right)^x - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] dx = -\frac{2}{\ln 5} \left(\frac{1}{5} \right)^x + \frac{1}{5 \ln 2} \left(\frac{1}{2} \right)^x + C.$$

$$\text{【1646】} \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C.$$

$$\text{【1647】} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

$$\text{【1648】} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$$

提示 注意 $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = [\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)](\cos x - \sin x)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx = \int [\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)](\cos x - \sin x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C. \end{aligned}$$

【1649】 $\int \cot^2 x dx;$

提示 注意 $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

解 $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C.$

【1650】 $\int \tan^2 x dx.$

解 $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C.$

【1651】 $\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) dx.$

解 $\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) dx = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + C.$

【1652】 $\int \operatorname{th}^2 x dx.$

提示 注意 $\operatorname{th}^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

解 $\int \operatorname{th}^2 x dx = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) dx = x - \operatorname{th} x + C.$

【1653】 $\int \operatorname{coth}^2 x dx.$

提示 注意 $\operatorname{coth}^2 x = 1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

解 $\int \operatorname{coth}^2 x dx = \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right) dx = x - \operatorname{coth} x + C.$

【1654】 证明:若 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ ($a \neq 0$).

提示 由不定积分的定义,命题即获证.

证 由 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 得知 $F'(x) = f(x)$. 因而有 $F'(ax+b) = f(ax+b)$, 且

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right] = F'(ax+b),$$

于是,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right] = f(ax+b),$$

所以,

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

求下列积分:

【1655】 $\int \frac{dx}{x+a}.$

解 $\int \frac{dx}{x+a} = \ln |x+a| + C.$

【1656】 $\int (2x-3)^{10} dx.$

解 $\int (2x-3)^{10} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} (2x-3)^{11} + C = \frac{1}{22} (2x-3)^{11} + C.$

【1657】 $\int \sqrt[3]{1-3x} dx.$

解 $\int \sqrt[3]{1-3x} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C.$

【1658】 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = -\frac{1}{5} \cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{5} \sqrt{2-5x} + C.$

【1659】 $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}.$

解 $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) (5x-2)^{-\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}} + C.$

【1660】⁺ $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx.$

解 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx = \int (1-x)^{-\frac{3}{5}} dx = -\frac{5}{2} \sqrt[5]{(1-x)^2} + C.$

【1661】 $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

解 $\int \frac{dx}{2+3x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C.$

【1662】 $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$

解 $\int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}x}{1 - \sqrt{\frac{3}{2}}x} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + x\sqrt{3}}{\sqrt{2} - x\sqrt{3}} \right| + C.$

【1663】 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C.$

【1664】 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left| x\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 1} \right| + C_1$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2 - 2} \right| + C.$

【1665】 $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$

解 $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx = -\left(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right) + C.$

【1666】 $\int (\sin 5x - \sin 5a) dx.$

解 $\int (\sin 5x - \sin 5a) dx = -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5a + C.$

【1667】 $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2} \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致,以后不再说明.中译本基本是按俄文第二版翻译的.俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

【1668】 $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

解 $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + C.$

【1669】 $\int \frac{dx}{1-\cos x}.$

解 $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\cot \frac{x}{2} + C.$

【1670】 $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

提示 注意 $\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}$, 并利用 1668 题的结果.

解 $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = -\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) + C.$

【1671】 $\int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx.$

解 $\int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(2x+1) + \operatorname{sh}(2x-1)] + C.$

【1672】 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = 2 \operatorname{th} \frac{x}{2} + C.$

【1673】 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = -2 \operatorname{coth} \frac{x}{2} + C.$

用适当地变换被积函数的方法求下列积分:

【1674】 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$

【1675】 $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$

提示 注意 $x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \frac{1}{3} (1+x^3)^{\frac{1}{3}} d(1+x^3).$

解 $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int (1+x^3)^{\frac{1}{3}} d(1+x^3) = \frac{1}{4} (1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C.$

【1676】 $\int \frac{x dx}{3-2x^2}.$

解 $\int \frac{x dx}{3-2x^2} = -\frac{1}{4} \int \frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} = -\frac{1}{4} \ln |3-2x^2| + C.$

【1677】 $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}.$

解 $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C.$

【1678】 $\int \frac{x dx}{4+x^4}.$

提示 注意 $\frac{x dx}{4+x^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2}.$

解 $\int \frac{x dx}{4+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2} = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2} + C.$

【1679】 $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}.$

解 $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}} \right| + C.$

【1680】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$

提示 注意 $\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \cdot \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$

【1681】 $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$

解 $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = - \int \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{1}{x} + C.$

【1682】 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}}.$

提示 注意 $\frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}} = \frac{dx}{x|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}.$

解 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\ln\left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C$
 $= -\ln \left| \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C.$

【1683】 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$

提示 仿 1682 题的解法.

解 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x|x| \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\arcsin \frac{1}{|x|} + C.$

【1684】 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$

提示 注意 $\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\operatorname{sgn} x dx}{x^3 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sgn} x d\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$

解 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\operatorname{sgn} x dx}{x^3 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sgn} x d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$$= \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

【1685】 $\int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$

解 $\int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \int (x^2-1)^{-\frac{3}{2}} d(x^2-1) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C.$

【1686】 $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}.$

解 $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{24} \int (8x^3+27)^{-\frac{2}{3}} d(8x^3+27) = \frac{1}{8} \sqrt[3]{8x^3+27} + C.$

【1687】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$

提示 分别就 $x > 0$ 及 $x < -1$ 时求解,然后将这两个结果合并,其结果为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2 \operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|}) + C.$$

解 由 $x(1+x) > 0$ 知: $x > 0$ 或 $x < -1$. 当 $x > 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C;$$

当 $x < -1$ 时, $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = - \int \frac{d(-(1+x))}{\sqrt{(-x)(-(1+x))}} = -2 \int \frac{d(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}}$
 $= -2 \ln(\sqrt{-x} + \sqrt{-(1+x)}) + C.$

总之,得 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2 \operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|}) + C.$

【1688】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

解 由 $x(1-x) > 0$ 知: $0 < x < 1$. 于是,得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

【1689】 $\int x e^{-x^2} dx.$

解 $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$

【1690】 $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}.$

解 $\int \frac{e^x dx}{2+e^x} = \int \frac{d(2+e^x)}{2+e^x} = \ln(2+e^x) + C.$

【1691】 $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

提示 注意 $\frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}.$

解 $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctan(e^x) + C.$

【1692】 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

提示 注意 $\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}} = -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + C.$

【1693】 $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$

解 $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{3} \ln^3 x + C.$

【1694】 $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$

解 $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)} = \ln |\ln(\ln x)| + C.$

【1695】 $\int \sin^5 x \cos x dx.$

解 $\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$

【1696】 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx.$

解 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx = -\int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} d(\cos x) = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$

【1697】 $\int \tan x dx.$

解 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$

【1698】 $\int \cot x dx.$

解 $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$

【1699】 $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$

解 $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C$
 $= \frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x} + C.$

【1700】⁺ $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx.$

提示 分别就 $|a| = |b| \neq 0$ 及 $|a| \neq |b|$ 两种情况求解.

解 当 $|a| = |b| \neq 0$ 时,

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx = \frac{1}{|a|} \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2|a|} \sin^2 x + C;$$

当 $|a| \neq |b|$ 时,

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2}} = \frac{1}{a^2 - b^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2} + C$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C.$$

【1701】 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot x}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot x}} = -\int (\cot x)^{-\frac{1}{4}} d(\cot x) = -\frac{4}{3} \sqrt[4]{\cot^3 x} + C.$

【1702】 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}.$

提示 注意 $\frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} dx}{\tan^2 x + 2} = \frac{d(\tan x)}{(\sqrt{2})^2 + (\tan x)^2}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2} dx = \int \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

【1703】 $\int \frac{dx}{\sin x}$.

提示 注意 $\frac{dx}{\sin x} = \frac{\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}}{\tan \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$.

【1704】 $\int \frac{dx}{\cos x}$.

提示 注意 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, 并利用 1703 题的结果.

解 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C$.

【1705】 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C$.

【1706】 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} = 2 \arctan(e^x) + C$.

【1707】 $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx$.

提示 注意 $\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch}^2 2x)$.

解 因为 $\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x = (\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x)^2 - 2\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch}^2 2x - \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 2x = \frac{1 + \operatorname{ch}^2 2x}{2}$,

所以, $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx = \int \frac{\frac{1}{4} d(\operatorname{ch} 2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(\operatorname{ch} 2x + \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}) + C_1$
 $= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}\right) + C$.

【1708】 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int (\operatorname{th} x)^{-\frac{2}{3}} d(\operatorname{th} x) = 3 \sqrt[3]{\operatorname{th} x} + C$.

【1709】 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx.$

解 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int \arctan x d(\arctan x) = \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C.$

【1710】 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$

解 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

【1711】 $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$

解 $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx = \int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{1}{2}} d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})] = \frac{2}{3} \ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$

【1712】 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$

提示 注意 $\frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}.$

解 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C.$

【1713】 $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx.$

提示 注意 $\frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}.$

解 $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} \right) + C.$

【1714】⁺ $\int \frac{x^{14} dx}{(x^5+1)^4}.$

提示 注意 $\frac{x^{14} dx}{(x^5+1)^4} = \frac{x^{14} dx}{x^{20}(1+x^{-5})^4} = -\frac{1}{5} (1+x^{-5})^{-4} d(1+x^{-5}).$

解 $\int \frac{x^{14} dx}{(x^5+1)^4} = \int \frac{x^{14} dx}{x^{20}(1+x^{-5})^4} = -\frac{1}{5} \int (1+x^{-5})^{-4} d(1+x^{-5}) = \frac{1}{15} (1+x^{-5})^{-3} + C_1$
 $= \frac{x^{15}}{15(x^5+1)^3} + C_1 = \frac{(x^5+1)^3 - 3x^{10} - 3x^5 - 1}{15(x^5+1)^3} + C_1 = -\frac{3x^{10}+3x^5+1}{15(x^5+1)^3} + C.$

【1715】 $\int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}.$

提示 分别就 $n=-2$ 及 $n \neq -2$ 两种情况求解.

解 当 $n=-2$ 时, $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x| + C,$

当 $n \neq -2$ 时, $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} dx = \frac{2}{n+2} \int \frac{d(x^{\frac{n+2}{2}})}{\sqrt{1+(x^{\frac{n+2}{2}})^2}} = \frac{2}{n+2} \ln(x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}}) + C.$

【1716】⁺ $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

提示 注意 $\frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$.

解 $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} d\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.$

【1717】 $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$

提示 注意 $\frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}.$

解 $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right) + C.$

【1718】 $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

提示 注意 $\frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x dx}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d(\cos 2x)}{1 + \cos^2 2x}.$

解 $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x dx}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(\cos 2x)}{1 + \cos^2 2x} = -\frac{1}{2} \arctan(\cos 2x) + C.$

【1719】 $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx.$

解 $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 1} dx = \frac{1}{\ln 3 - \ln 2} \int \frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 1} = \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| + C.$

【1720】 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}.$

解 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$

用分项积分法计算下列积分:

【1721】 $\int x^2(2-3x^2)^2 dx.$

解 $\int x^2(2-3x^2)^2 dx = \int (4x^2 - 12x^4 + 9x^6) dx = \frac{4}{3}x^3 - \frac{12}{5}x^5 + \frac{9}{7}x^7 + C.$

【1722】 $\int \frac{1+x}{1-x} dx.$

解 $\int \frac{1+x}{1-x} dx = \int \left(-1 + \frac{2}{1-x}\right) dx = -x - 2\ln|1-x| + C.$

【1723】 $\int \frac{x^2}{1+x} dx.$

解 $\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| + C.$

【1724】 $\int \frac{x^3}{3+x} dx.$

解 $\int \frac{x^3}{3+x} dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{3+x}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|3+x| + C.$

【1725】 $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx.$

解 $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = x + \ln(1+x^2) + C.$

【1726】 $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx.$

解 $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx = \int \frac{(x^2-2)-4x+6}{2-x^2} dx = \int \left(-1 - \frac{4x}{2-x^2} + \frac{6}{2-x^2} \right) dx$
 $= -x + 2\ln|2-x^2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x} \right| + C.$

【1727】 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx.$

提示 注意 $x^2 = [(x-1)+1]^2$.

解 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx = \int \frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}} dx = \int [(1-x)^{-98} - 2(1-x)^{-99} + (1-x)^{-100}] dx$
 $= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C.$

【1728】 $\int \frac{x^5}{x+1} dx.$

解 $\int \frac{x^5}{x+1} dx = \int \left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|1+x| + C.$

【1729】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \int \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx = \frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}] + C.$

【1730】 $\int x \sqrt{2-5x} dx.$

提示 注意 $x = -\frac{1}{5}(2-5x) + \frac{2}{5}$.

解 $\int x \sqrt{2-5x} dx = \int \left[-\frac{1}{5}(2-5x) + \frac{2}{5} \right] (2-5x)^{\frac{1}{2}} dx = \int \left[-\frac{1}{5}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(2-5x)^{\frac{1}{2}} \right] dx$
 $= \frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C.$

【1731】 $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}}.$

解 $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}} = -\frac{1}{3} \int \frac{(1-3x)-1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}} dx = -\frac{1}{3} \int [(1-3x)^{-\frac{1}{3}} - (1-3x)^{-\frac{4}{3}}] dx$
 $= \frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{1}{3}} + C = -\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{1}{3}} + C.$

【1732】 $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx.$

解 $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int [(x^2+1)-1](1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \int [(1+x^2)^{\frac{4}{3}} - (1+x^2)^{\frac{1}{3}}] d(1+x^2)$
 $= \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$

【1733】 $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

提示 注意 $1 = \frac{1}{4}[(x+3)-(x-1)]$. 1734 题, 1735 题及 1736 题均可仿本题的解法.

解 $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C.$

【1734】 $\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$

解 $\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$

【1735】 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

解 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} \right) dx = \arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

【1736】 $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$

解 $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+3} \right) dx = \frac{1}{10\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{5\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

【1737】 $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)}.$

解 $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)} = \int \left(\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \ln \frac{|x+3|^3}{(x+2)^2} + C.$

【1738】 $\int \frac{x dx}{x^4+3x^2+2}.$

提示 注意 $\frac{x dx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)}$, 并仿 1733 题的解法.

解 $\int \frac{x dx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} \right) d(x^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2+2} + C.$

【1739】 $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} \quad (a \neq b).$

提示 注意 $\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right)^2 = \frac{1}{(a-b)^2} \left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)} \right].$

解 $\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} &= \frac{1}{(a-b)^2} \int \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \int \left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)} \right] dx \\ &= -\frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} \right) - \frac{2}{(a-b)^2} \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} \\ &= -\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C. \end{aligned}$

【1740】 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (|a| \neq |b|).$

解 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{a^2-b^2} \int \left(\frac{1}{x^2+b^2} - \frac{1}{x^2+a^2} \right) dx = \frac{1}{a^2-b^2} \left(\frac{1}{b} \arctan \frac{x}{b} - \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) + C.$

【1741】 $\int \sin^2 x dx.$

解 $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

【1742】 $\int \cos^2 x dx.$

解 $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

【1743】 $\int \sin x \sin(x+a) dx.$

解 $\int \sin x \sin(x+a) dx = \frac{1}{2} \int [\cos a - \cos(2x+a)] dx = \frac{x}{2} \cos a - \frac{1}{4} \sin(2x+a) + C.$

【1744】 $\int \sin 3x \sin 5x dx.$

解 $\int \sin 3x \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C.$

【1745】 $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx.$

解 $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx = \frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{5x}{6} + \cos \frac{x}{6} \right) dx = \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6} + C.$

【1746】 $\int \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx.$

解 $\int \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \int \left[\sin \left(5x + \frac{\pi}{12} \right) - \sin \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) \right] dx$
 $= -\frac{1}{10} \cos \left(5x + \frac{\pi}{12} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) + C.$

【1747】 $\int \sin^3 x dx.$

提示 注意 $\sin^3 x dx = \sin^2 x \sin x dx = (\cos^2 x - 1) d(\cos x).$

解 $\int \sin^3 x dx = \int (\cos^2 x - 1) d(\cos x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$

【1748】 $\int \cos^3 x dx.$

提示 仿 1747 题的解法.

解 $\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$

【1749】 $\int \sin^4 x dx.$

提示 注意 $\sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{1}{8} (3 - 4\cos 2x + \cos 4x).$

解 $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx$
 $= \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$

【1750】 $\int \cos^4 x dx.$

解 $\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx$
 $= \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$

【1751】 $\int \cot^2 x dx.$

解 $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C.$

【1752】 $\int \tan^3 x dx.$

提示 注意 $\tan^3 x = \tan x (\sec^2 x - 1)$, 并利用 1697 题的结果.

解 $\int \tan^3 x dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan x d(\tan x) - \int \tan x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$

注 其中第二个积分见 1697 题.

【1753】 $\int \sin^2 3x \sin^3 2x dx.$

提示 注意 $\sin^2 3x \sin^3 2x = \frac{3}{8} \sin 2x + \frac{3}{16} \sin 4x - \frac{1}{8} \sin 6x - \frac{3}{16} \sin 8x + \frac{1}{16} \sin 12x.$

解 因为 $\sin^2 3x \sin^3 2x = \frac{1}{2} (1 - \cos 6x) \cdot \frac{1}{4} (3\sin 2x - \sin 6x)$
 $= \frac{1}{8} (3\sin 2x - 3\cos 6x \sin 2x - \sin 6x + \sin 6x \cos 6x)$

$$= \frac{3}{8} \sin 2x + \frac{3}{16} \sin 4x - \frac{1}{8} \sin 6x - \frac{3}{16} \sin 8x + \frac{1}{16} \sin 12x,$$

所以, $\int \sin^2 3x \sin^3 2x dx = -\frac{3}{16} \cos 2x - \frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x + \frac{3}{128} \cos 8x - \frac{1}{192} \cos 12x + C.$

【1754】 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

提示 注意 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cot x + \tan x + C.$

【1755】 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$

提示 仿 1754 题的解法, 并利用 1704 题的结果.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{\sin x} + C.$

其中第一个积分见 1704 题.

【1756】 $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$

提示 仿 1754 题的解法, 并利用 1703 题的结果.

解 $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin x \cos x} \right) dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + \int \frac{d(2x)}{\sin 2x} = \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\tan x| + C.$

其中第二个积分见 1703 题.

【1757】 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx.$

解 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \cos x dx = \int \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) d(\sin x) = \ln |\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$

【1758】 $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

解 $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) d(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C.$

【1759】 $\int \frac{dx}{1 + e^x}.$

提示 注意 $1 = (1 + e^x) - e^x$.

解 $\int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \left(1 - \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx = x - \ln(1 + e^x) + C.$

【1760】 $\int \frac{(1 + e^x)^2}{1 + e^{2x}} dx.$

解 $\int \frac{(1 + e^x)^2}{1 + e^{2x}} dx = \int \left(1 + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \right) dx = x + 2 \arctan(e^x) + C.$

【1761】 $\int \operatorname{sh}^2 x dx.$

解 $\int \operatorname{sh}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x - \frac{x}{2} + C.$

【1762】 $\int \operatorname{ch}^2 x dx.$

解 $\int \operatorname{ch}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{x}{2} + C.$

【1763】 $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x dx.$

解 $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x dx = 2 \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x dx = 2 \int \operatorname{sh}^2 x d(\operatorname{sh} x) = \frac{2}{3} \operatorname{sh}^3 x + C.$

【1764】 $\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x dx.$

解 $\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 4x + \operatorname{ch} 2x) dx = \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.$

【1765】 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}.$

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \right) dx = -(\operatorname{coth} x + \operatorname{th} x) + C.$

用适当的代换,求下列积分:

【1766】 $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx.$

解 设 $1-x=t$, 则 $x=1-t, dx=-dt$,

故得 $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx = - \int (1-t)^2 t^{\frac{1}{3}} dt = - \int (t^{\frac{1}{3}} - 2t^{\frac{4}{3}} + t^{\frac{7}{3}}) dt = -\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7} t^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10} t^{\frac{10}{3}} + C$
 $= -\frac{3}{140} (9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}} + C.$

【1767】 $\int x^3 (1-5x^2)^{10} dx.$

解 设 $1-5x^2=t$, 则 $x^2=\frac{1}{5}(1-t)$, 从而,

$$x^3 dx = \frac{1}{2} x^2 d(x^2) = \frac{1}{10} (1-t) \left(-\frac{1}{5} \right) dt = -\frac{1}{50} (1-t) dt,$$

故得 $\int x^3 (1-5x^2)^{10} dx = -\frac{1}{50} \int (t^{10} - t^{11}) dt = -\frac{1}{550} t^{11} + \frac{1}{600} t^{12} + C = -\frac{1+55x^2}{6600} (1-5x^2)^{11} + C.$

【1768】 $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx.$

解 设 $2-x=t$, 则 $x=2-t, dx=-dt$,

故得 $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx = - \int t^{-\frac{1}{2}} (2-t)^2 dt = - \int (4t^{-\frac{1}{2}} - 4t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}) dt = -8t^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + C$
 $= -\frac{2}{15} (32+8x+3x^2) \sqrt{2-x} + C.$

【1769】 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

解 设 $1-x^2=t$, 则 $x^2=1-t$, 从而,

$$x^5 dx = \frac{1}{2} (x^2)^2 d(x^2) = -\frac{1}{2} (1-t)^2 dt,$$

故得 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^2 dt = -\frac{1}{2} \int (t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}) dt = -t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} t^{\frac{5}{2}} + C$
 $= -\frac{1}{15} (8+4x^2+3x^4) \sqrt{1-x^2} + C.$

【1770】 $\int x^5 (2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$

解 设 $2-5x^3=t$, 则 $x^3=\frac{1}{5}(2-t)$, 从而,

$$x^5 dx = \frac{1}{3} x^3 d(x^3) = -\frac{1}{75} (2-t) dt,$$

故得 $\int x^5 (2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx = -\frac{1}{75} \int t^{\frac{2}{3}} (2-t) dt = -\frac{1}{75} \int (2t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{5}{3}}) dt = -\frac{2}{125} t^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{200} t^{\frac{8}{3}} + C$
 $= -\frac{6+25x^3}{1000} (2-5x^3)^{\frac{5}{3}} + C.$

【1771】 $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx.$

解 设 $\sin x = t$, 则 $\cos^5 x dx = (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = (1 - t^2)^2 dt$,

故得
$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx = \int (1 - t^2)^2 t^{\frac{1}{2}} dt = \int (t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}}) dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7} t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} t^{\frac{11}{2}} + C$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x \right) \sqrt{\sin^3 x} + C.$$

【1772】 $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx,$

提示 令 $\cos^2 x = t$.

解 设 $\cos^2 x = t$, 则 $\sin x \cos x dx = -\frac{1}{2} dt$,

故得
$$\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{t}{1+t} dt = -\frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \ln(1+t) + C$$

$$= -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x) + C.$$

【1773】 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

提示 令 $\tan x = t$.

解 设 $\tan x = t$, 则 $\frac{1}{\cos^4 x} dx = (1 + t^2) dt$,

故得
$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int (t^4 + t^2) dt = \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C.$$

【1774】 $\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$

解 设 $1 + \ln x = t$, 则 $\frac{\ln x dx}{x} = (1 + \ln x - 1) d(1 + \ln x) = (t - 1) dt$,

故得
$$\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1 + \ln x}} = \int t^{-\frac{1}{2}} (t - 1) dt = \int (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} (\ln x - 2) \sqrt{1 + \ln x} + C.$$

【1775】 $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$

提示 令 $e^{\frac{x}{2}} = t$.

解 设 $e^{\frac{x}{2}} = t$, 则 $e^x = t^2, dx = \frac{2dt}{t}$,

故得
$$\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} = 2 \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = 2 \int \left(\frac{1-t}{t^2} + \frac{1}{1+t} \right) dt = -\frac{2}{t} - 2 \ln t + 2 \ln(1+t) + C$$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2 \ln(1 + e^{\frac{x}{2}}) + C.$$

【1776】 $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}.$

解 设 $\sqrt{1 + e^x} = t$, 则 $x = \ln(t^2 - 1), dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$,

故得
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) + C = \ln \left(\frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right) + C = x - 2 \ln(1 + \sqrt{1 + e^x}) + C.$$

【1777】 $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$

提示 令 $\arctan \sqrt{x} = t$.

解 设 $\arctan \sqrt{x} = t$, 则 $dt = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$,

故得 $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = 2 \int t dt = t^2 + C = (\arctan \sqrt{x})^2 + C.$

运用三角函数的代换 $x = a \sin t, x = a \tan t, x = a \sin^2 t$ 等, 求下列积分(参数为正的):

【1778】 $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

解 由于被积函数的存在域为 $-1 < x < 1$, 因此, 可设 $x = \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. 从而,

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \cos^3 t, \quad dx = \cos t dt.$$

代入得 $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$

【1779】 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}.$

解题思路 注意被积函数的存在域为 $x > \sqrt{2}$ 及 $x < -\sqrt{2}$.

(1) 当 $x > \sqrt{2}$ 时, 可设 $x = \sqrt{2} \sec t$, 并限制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

(2) 当 $x < -\sqrt{2}$ 时, 仍设 $x = \sqrt{2} \sec t$, 但限制 $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.

解 被积函数的存在域为 $x > \sqrt{2}$ 及 $x < -\sqrt{2}$, 分别考虑.

(1) 当 $x > \sqrt{2}$ 时, 可设 $x = \sqrt{2} \sec t$, 并限制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$. 从而,

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{2 \sec^2 t}{\sqrt{2} \tan t}, \quad dx = \sqrt{2} \sec t \tan t dt.$$

代入得 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}} = 2 \int \sec^3 t dt = 2 \int \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+\sin t} + \frac{1}{1-\sin t} \right)^2 d(\sin t)$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2} + \int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\sin t} - \frac{1}{1+\sin t} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t} \right) + C_1$
 $= \tan t \sec t + \ln(\sec t + \tan t) + C_1 = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-2} + \ln(x + \sqrt{x^2-2}) + C.$

(2) 当 $x < -\sqrt{2}$ 时, 仍设 $x = \sqrt{2} \sec t$, 但限制 $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. 其余步骤与上相同, 注意到, 此时 $\sec t + \tan t < 0$,

因此, 在对数符号里要加绝对值, 即结果为 $\frac{x}{2} \sqrt{x^2-2} + \ln|x + \sqrt{x^2-2}| + C.$

总之, 当 $|x| > \sqrt{2}$ 时, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-2} + \ln|x + \sqrt{x^2-2}| + C.$

【1780】 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx.$

解 被积函数的存在域为 $-a \leq x \leq a$, 因此, 可设 $x = a \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. 从而,

$$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos t, \quad dx = a \cos t dt.$$

代入得 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C$
 $= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C.$

*) 利用 1742 题的结果.

【1781】 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$

解 被积函数的存在域为 $-\infty < x < +\infty$, 因此, 可设 $x = a \tan t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. 从而,

$$(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} = a^3 \sec^3 t, \quad dx = a \sec^2 t dt.$$

代入得 $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\tan t}{\sqrt{1 + \tan^2 t}} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C.$

【1782】 $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx.$

解题思路 注意被积函数的存在域为 $-a \leq x < a$. 设 $x = a \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. 求出结果的存在域为 $-a < x < a$. 可以证明: 此结果在端点 $x = -a$ 处也成立. 即原函数在点 $x = -a$ 的(右)导数等于被积函数在点 $x = -a$ 之值.

解 被积函数的存在域为 $-a \leq x < a$, 因此, 可设 $x = a \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. 从而,

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} = \frac{1+\sin t}{\cos t}, \quad dx = a \cos t dt.$$

代入得 $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = a \int (1 + \sin t) dt = a(t - \cos t) + C = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad (-a < x < a).$

注意, 上式在端点 $x = -a$ 也成立. 即函数 $F(x) = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$ 在点 $x = -a$ 的(右)导数等于被积函数 $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ 在点 $x = -a$ 之值. 事实上, 由于 $F(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $-a \leq x < a$ 连续, 且 $F'(x) = f(x)$ 在 $-a < x < a$ 成立. 故由中值定理知, 当 $-a < x < a$ 时, 有

$$\frac{F(x) - F(-a)}{x + a} = F'(\xi) = f(\xi), \quad -a < \xi < x.$$

由此可知, (右)导数 $F'(-a) = \lim_{x \rightarrow -a+0} \frac{F(x) - F(-a)}{x + a} = \lim_{\xi \rightarrow -a+0} f(\xi) = f(-a).$

下面有些题目在端点的情况可类似地进行讨论, 从略.

【1783】 $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx.$

解题思路 注意被积函数的存在域为 $0 \leq x < 2a$, 设 $x = 2a \sin^2 t$, 并限制 $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. 利用 1749 题的结果.

解 被积函数的存在域为 $0 \leq x < 2a$, 因此, 可设 $x = 2a \sin^2 t$, 并限制 $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. 从而,

$$x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} = \frac{2a \sin^3 t}{\cos t}, \quad dx = 4a \sin t \cos t dt.$$

代入得 $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx = 8a^2 \int \sin^4 t dt = 8a^2 \left(\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t \right)^{*)} + C.$

注意到 $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sqrt{\frac{x}{2a}} \sqrt{1 - \frac{x}{2a}} = \frac{1}{a} \sqrt{x(2a-x)}$

及 $\sin 4t = 2 \sin 2t \cos 2t = 4 \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t) = \frac{2}{a^2} (a-x) \sqrt{x(2a-x)},$

最后得 $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx = 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - 2a^2 \frac{1}{a} \sqrt{x(2a-x)} + \frac{1}{4} a^2 \frac{2}{a^2} (a-x) \sqrt{x(2a-x)} + C$
 $= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2} \sqrt{x(2a-x)} + C.$

*) 利用 1749 题的结果.

【1784】 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$

解题思路 不妨设 $a < b$. 注意被积函数的存在域为 $a < x < b$, 设 $x-a = (b-a) \sin^2 t$, 并限制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

解 不妨设 $a < b$. 被积函数的存在域为 $a < x < b$, 因此, 可设 $x-a = (b-a)\sin^2 t$, 并限制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$. 从而,

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin t \cos t, \quad dx = 2(b-a)\sin t \cos t dt.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \int dt = 2t + C = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

【1785】 $\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx.$

解题思路 与 1784 题相同, 作同一代换, 并注意到

$$\sin 4t = 4 \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t) = 4 \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \sqrt{1 - \frac{x-a}{b-a}} \left(1 - 2 \frac{x-a}{b-a}\right) = -4 \frac{2x-(a+b)}{(b-a)^2} \sqrt{(x-a)(b-x)}.$$

解 与 1784 题相同, 作同一代换, 并注意到

$$\sin 4t = 4 \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t) = 4 \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \sqrt{1 - \frac{x-a}{b-a}} \left(1 - 2 \frac{x-a}{b-a}\right) = -4 \frac{2x-(a+b)}{(b-a)^2} \sqrt{(x-a)(b-x)},$$

即得
$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = 2(b-a)^2 \int \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{(b-a)^2}{2} \int \sin^2 2t dt = \frac{(b-a)^2}{4} \int (1 - \cos 4t) dt$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t\right) + C = \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + \frac{2x-(a+b)}{4} \sqrt{(x-a)(b-x)} + C.$$

用双曲函数代换 $x = a \operatorname{sh} t$, $x = a \operatorname{ch} t$ 等, 求下列积分(参数为正的):

【1786】 $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$

提示 设 $x = a \operatorname{sh} t$, 并利用 1762 题的结果.

解 被积函数的存在域为 $-\infty < x < +\infty$, 因此, 可设 $x = a \operatorname{sh} t$. 从而,

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \operatorname{ch} t, \quad dx = a \operatorname{ch} t dt.$$

代入得

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t\right) + C_1.$$

注意到 $x + \sqrt{a^2 + x^2} = a(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) = ae^t$, 即 $t = \ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$ 及 $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = \frac{2x \sqrt{a^2 + x^2}}{a^2}$, 最后得

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + C.$$

*) 利用 1762 题的结果.

【1787】 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx.$

提示 设 $x = a \operatorname{sh} t$, 并利用 1761 题的结果.

解 与 1786 题相同, 设 $x = a \operatorname{sh} t$, 则 $\frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}$, $dx = a \operatorname{ch} t dt$.

代入得
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = a^2 \int \operatorname{sh}^2 t dt = a^2 \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t - \frac{t}{2}\right) + C_1 = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

*) 利用 1761 题的结果.

【1788】⁺ $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx.$

解题思路 注意被积函数的存在域为 $x \geq a$ 及 $x < -a$.

(1) 当 $x > a$ 时, 设 $x = a \operatorname{ch} t$, 并限制 $t > 0$. (2) 当 $x < -a$ 时, 设 $x = -a \operatorname{ch} t$, 并限制 $t > 0$.

解 被积函数的存在域为 $x \geq a$ 及 $x < -a$.

(1) 当 $x > a$ 时, 可设 $x = a \operatorname{ch} t$, 并限制 $t > 0$. 从而,

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{sh} t}, \quad dx = a \operatorname{sh} t dt.$$

代入得 $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = a \int (\operatorname{ch} t - 1) dt = a \operatorname{sh} t - at + C_1 = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} - at + C_1$
 $= a \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - a \ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} + \frac{x}{a}\right) + C_1 = \sqrt{x^2 - a^2} - a \ln(\sqrt{x^2 - a^2} + x) + C_2$
 $= \sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}) + C.$

(2) 当 $x < -a$ 时, 可设 $x = -a \operatorname{ch} t$, 并限制 $t > 0$. 从而, $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{\operatorname{ch} t + 1}{\operatorname{sh} t}$, $dx = -a \operatorname{sh} t dt$.

代入得 $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = -a \int (\operatorname{ch} t + 1) dt = -a \operatorname{sh} t - at + C_1$
 $= -a \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - a \ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - \frac{x}{a}\right) + C_1 = -\sqrt{x^2 - a^2} - a \ln(\sqrt{x^2 - a^2} - x) + C_2$
 $= -\sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{-x+a} + \sqrt{-x-a}) + C.$

总之, 当 $|x| > a$ 时,

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = \operatorname{sgn} x \sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x+a|}) + C.$$

【1789】 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$

解 不妨设 $a < b$. 注意被积函数的存在域为 $x > -a$ 及 $x < -b$.

(1) 当 $x > -a$ 时, 设 $x+a = (b-a) \operatorname{sh}^2 t$, 并限制 $t > 0$.

(2) 当 $x < -b$ 时, 设 $x+b = (a-b) \operatorname{sh}^2 t$, 并限制 $t > 0$.

解 不妨设 $a < b$. 被积函数的存在域为 $x > -a$ 及 $x < -b$.

(1) 当 $x > -a$ 时, 可设 $x+a = (b-a) \operatorname{sh}^2 t$, 并限制 $t > 0$.

从而, $\sqrt{(x+a)(x+b)} = (b-a) \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$, $dx = 2(b-a) \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t dt$.

代入得 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2 \int dt = 2t + C_1.$

注意到 $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{b-a} (\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) = \sqrt{b-a} e^t$, 就有 $t = \ln \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}}$, 最后得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2 \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) + C.$$

(2) 当 $x < -b$ 时, 可设 $x+b = (a-b) \operatorname{sh}^2 t$, 并限制 $t > 0$.

从而, $\sqrt{(x+a)(x+b)} = (b-a) \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$, $dx = -(b-a) 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t dt$.

代入得 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = -2 \int dt = -2t + C_1 = -2 \ln(\sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}) + C.$

总之, $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = \begin{cases} 2 \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}), & x+a > 0 \text{ 及 } x+b > 0, \\ -2 \ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}), & x+a < 0 \text{ 及 } x+b < 0. \end{cases}$

【1790】 $\int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx.$

提示 仿 1789 题的解法.

解 与 1789 题相同, 作同一代换, 只是在求积分的过程中变动个别地方. 今以 $x > -a$ 时为例, 解法如下:

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx = 2(b-a)^2 \int \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{1}{2} (b-a)^2 \int \operatorname{sh}^2 2t dt = \frac{1}{4} (b-a)^2 \int (\operatorname{ch} 4t - 1) dt$$

$$= \frac{1}{4} (b-a)^2 \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh} 4t - t \right) + C_1 = \frac{1}{4} (b-a)^2 [\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t (1 + 2 \operatorname{sh}^2 t) - t] + C_1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(b-a)^2 \left[\sqrt{\frac{x+a}{b-a}} \sqrt{1+\frac{x+a}{b-a}} \left(1+2 \cdot \frac{x+a}{b-a}\right) - \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) \right] + C \\
&= \frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4} \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) + C.
\end{aligned}$$

当 $x < -b$ 时, 与 1789 题类似, 只是将结果改成

$$\frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} + \frac{(b-a)^2}{4} \ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}) + C,$$

此处不再写出解法步骤.

总之,

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx \\
&= \begin{cases} \frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4} \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) + C, & x+a > 0 \text{ 及 } x+b > 0, \\ \frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} + \frac{(b-a)^2}{4} \ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}) + C, & x+a < 0 \text{ 及 } x+b < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

用分部积分法, 求下列积分:

【1791】 $\int \ln x dx.$

解 $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C.$

【1792】 $\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1).$

解 $\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1} \int \ln x d(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C.$

【1793】 $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx.$

解 $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx = - \int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \ln^2 x + \int \frac{1}{x} 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} \ln^2 x - 2 \int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right)$
 $= -\frac{1}{x} \ln^2 x - \frac{2}{x} \ln x + 2 \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C.$

【1794】 $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$

解 $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \frac{2}{3} \int \ln^2 x d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{4}{3} \int x^{\frac{3}{2}} \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$
 $= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{8}{9} \int \ln x d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} \ln x + \frac{8}{9} \int x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx$
 $= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right) + C.$

【1795】 $\int x e^{-x} dx.$

解 $\int x e^{-x} dx = - \int x d(e^{-x}) = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$
 $= -e^{-x} (x+1) + C.$

【1796】 $\int x^2 e^{-2x} dx$

解 $\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int x^2 d(e^{-2x}) = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} 2x dx = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} \int x d(e^{-2x})$
 $= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) + C.$

【1797】 $\int x^3 e^{-x^2} dx.$

提示 注意 $x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} x^2 d(e^{-x^2})$.

$$\text{解 } \int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int x^2 d(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(x^2) = -\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2} + C.$$

$$\text{【1798】 } \int x \cos x dx.$$

$$\text{解 } \int x \cos x dx = \int x d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

$$\text{【1799】 } \int x^2 \sin 2x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x^2 \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} \int x^2 d(\cos 2x) = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} \int x d(\sin 2x) \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{2x^2-1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1800】 } \int x \operatorname{sh} x dx.$$

$$\text{解 } \int x \operatorname{sh} x dx = \int x d(\operatorname{ch} x) = x \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C.$$

$$\text{【1801】 } \int x^3 \operatorname{ch} 3x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x^3 \operatorname{ch} 3x dx &= \frac{1}{3} \int x^3 d(\operatorname{sh} 3x) = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sh} 3x - \int x^2 \operatorname{sh} 3x dx = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3} \int x^2 d(\operatorname{ch} 3x) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3} x^2 \operatorname{ch} 3x + \frac{2}{3} \int x \operatorname{ch} 3x dx = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3} x^2 \operatorname{ch} 3x + \frac{2}{9} \int x d(\operatorname{sh} 3x) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3} x^2 \operatorname{ch} 3x + \frac{2}{9} x \operatorname{sh} 3x - \frac{2}{9} \int \operatorname{sh} 3x dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right) \operatorname{sh} 3x - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27}\right) \operatorname{ch} 3x + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1802】 } \int \arctan x dx.$$

$$\text{解 } \int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$\text{【1803】 } \int \arcsin x dx.$$

$$\text{解 } \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\text{【1804】 } \int x \arctan x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1+x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1805】 } \int x^2 \arccos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x^2 \arccos x dx &= \frac{1}{3} \int \arccos x d(x^3) = \frac{1}{3} x^3 \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{6} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right) d(1-x^2) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{x^2+2}{9} \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1806】 } \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$$

提示 使用分部积分法后,令 $x = \sin t$, 并利用 1703 题的结果.

$$\text{解 } \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = - \int \arcsin x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}.$$

对最后一个积分作代换 $x = \sin t$, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos t dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C = \ln \left| \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right| + C = -\ln \left| \frac{1 + \cos t}{\sin t} \right| + C \\ &= -\ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C, \end{aligned}$$

$$\text{最后得} \quad \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arcsin x - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C.$$

*) 利用 1703 题的结果.

$$\text{【1807】 } \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$\text{解 } \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

$$\text{【1808】 } \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx &= \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} d(x^2) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right) dx \\ &= x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1809】 } \int \arctan \sqrt{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \arctan \sqrt{x} dx &= x \arctan \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)} dx = x \arctan \sqrt{x} - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) d(\sqrt{x}) \\ &= (x+1) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1810】 } \int \sin x \ln(\tan x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \sin x \ln(\tan x) dx &= - \int \ln(\tan x) d(\cos x) = -\cos x \ln(\tan x) + \int \cos x \cot x \sec^2 x dx \\ &= -\cos x \ln(\tan x) + \int \frac{dx}{\sin x} = -\cos x \ln(\tan x) + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

求下列积分:

$$\text{【1811】 } \int x^5 e^{x^3} dx.$$

$$\text{解 } \int x^5 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int x^3 d(e^{x^3}) = \frac{1}{3} x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{3} (x^3 - 1) e^{x^3} + C.$$

$$\text{【1812】 } \int (\arcsin x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - 2 \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x(\arcsin x)^2 + 2 \int \arcsin x d(\sqrt{1-x^2}) \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2 \int dx = x(\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1813】 } \int x(\arctan x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x(\arctan x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int (\arctan x)^2 d(x^2) = \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \arctan x dx = \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \arctan x dx + \int \arctan x d(\arctan x) \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - x \arctan x + \int \frac{x dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 = \frac{x^2+1}{2} (\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

【1814】 $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

解 $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx = \frac{1}{3} \int \ln \frac{1-x}{1+x} d(x^3) = \frac{x^3}{3} \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3} \int \frac{x^3}{1-x^2} dx$
 $= \frac{x^3}{3} \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3} \int \left(-x + \frac{x}{1-x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} \ln \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} \ln(1-x^2) + C.$

【1815】 $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

解 $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d(\sqrt{1+x^2})$
 $= \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \sqrt{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x + C.$

【1816】 $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$

提示 注意 $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} d(1+x^2) = -\frac{1}{2} x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$

解 $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x}{(1+x^2)^2} d(1+x^2) = -\frac{1}{2} \int x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2}$
 $= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C.$

【1817】 $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$

解 当 $a=0$ 时, 因为 $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C;$

当 $a \neq 0$ 时, 因为 $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{x}{x^2+a^2} + 2 \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^2} dx,$

故得 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) + C.$

【1818】 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx.$

提示 使用分部积分法后, 并注意 $x^2 = a^2 - (a^2 - x^2).$

解 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = x \sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = x \sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
 $= x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2-x^2} dx.$

于是, 得 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$

【1819】 $\int \sqrt{x^2+a} dx.$

解 $\int \sqrt{x^2+a} dx = x \sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a}} = x \sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a} dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$

于是, 得 $\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C.$

【1820】 $\int x^2 \sqrt{a^2+x^2} dx.$

解题思路 首先, 有 $x^2 \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} x (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2+x^2) = \frac{1}{3} x d[(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}],$ 使用分部积分



法. 其次, 将积分 $\int (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} dx$ 分成 $a^2 \int (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ 与 $\int x^2 (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ 两项, 并利用 1786 题的结果.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{2} \int x(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 + x^2) = \frac{1}{3} \int x d[(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}] \\ &= \frac{1}{3} x(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \int (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} x(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{3} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx - \frac{1}{3} \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{于是, 得} \quad \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \frac{3}{4} \left[\frac{1}{3} x(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{3} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx \right] \\ &= \frac{1}{4} x(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{4} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right] + C \\ &= \frac{x(2x^2 + a^2)}{8} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.\end{aligned}$$

*) 利用 1786 题的结果.

$$\text{【1821】} \quad \int x \sin^2 x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int x(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \int x d(\sin 2x) \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{4} \int \sin 2x dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1822】} \quad \int e^{\sqrt{x}} dx.$$

提示 令 $\sqrt{x} = t$ 后, 再使用分部积分法, 最后将 t 换成 \sqrt{x} .

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 代入得

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt = 2 \int t d(e^t) = 2t e^t - 2 \int e^t dt = 2t e^t - 2e^t + C = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$\text{【1823】} \quad \int x \sin \sqrt{x} dx.$$

提示 令 $\sqrt{x} = t$ 后, 多次使用分部积分法, 最后将 t 换成 \sqrt{x} .

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 代入得

$$\begin{aligned}\int x \sin \sqrt{x} dx &= 2 \int t^3 \sin t dt = -2 \int t^3 d(\cos t) = -2t^3 \cos t + 6 \int t^2 \cos t dt = -2t^3 \cos t + 6 \int t^2 d(\sin t) \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t - 12 \int t \sin t dt = -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12 \int t d(\cos t) \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12t \cos t - 12 \int \cos t dt = -2(t^2 - 6)t \cos t + 6(t^2 - 2) \sin t + C \\ &= 2(6 - x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 6(2 - x) \sin \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1824】} \quad \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$\text{解 记} \quad I_1 = \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx, \quad I_2 = \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$\begin{cases} I_1 = \int e^{\arctan x} d(-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + I_2, & \text{①} \\ I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\arctan x}) = \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - I_2. & \text{②} \end{cases}$$

则

$$\text{由①+②即得} \quad \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + C.$$

【1825】 $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

解 同 1824 题②-①, 即得 $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + C.$

【1826】 $\int \sin(\ln x) dx.$

解 $\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx.$

于是, 得 $\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$

【1827】 $\int \cos(\ln x) dx.$

提示 利用 1826 题的结果.

解 $\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$
 $= \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$

*) 利用 1826 题的结果.

【1828】 $\int e^{ax} \cos bx dx.$

解 如果 a, b 同时为零, 积分显然为 $x + C$; 若 $a = 0, b \neq 0$, 积分显然为 $\frac{1}{b} \sin bx + C$; 以下设 $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{1}{a} \int \cos bx d(e^{ax}) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \int \sin bx d(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx dx. \end{aligned}$$

于是, 得 $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx \right] + C = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C.$

【1829】 $\int e^{ax} \sin bx dx.$

解 若 $a = b = 0$, 则积分为 $x + C$; 若 $a = 0, b \neq 0$, 则积分为 $-\frac{1}{b} \cos bx + C$; 以下设 $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{1}{a} \int \sin bx d(e^{ax}) = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} \int \cos bx d(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx dx. \end{aligned}$$

于是, 得 $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$

【1830】 $\int e^{2x} \sin^2 x dx.$

提示 注意 $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$, 并利用 1828 题的结果.

解 $\int e^{2x} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx$
 $= \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cos 2x + 2 \sin 2x}{8} e^{2x} \right) + C = \frac{1}{8} e^{2x} (2 - \cos 2x - \sin 2x) + C.$

*) 利用 1828 题的结果.

$$\text{【1831】 } \int (e^x - \cos x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int (e^x - \cos x)^2 dx &= \int (e^{2x} - 2e^x \cos x + \cos^2 x) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - 2 \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2} + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right) + C \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x (\cos x + \sin x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1828 题的结果.

**) 利用 1742 题的结果.

$$\text{【1832】 } \int \frac{\operatorname{arccot}(e^x)}{e^x} dx.$$

提示 利用 1759 题的结果.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{\operatorname{arccot}(e^x)}{e^x} dx &= - \int \operatorname{arccot}(e^x) d(e^{-x}) = -e^{-x} \operatorname{arccot}(e^x) - \int \frac{dx}{1+e^{2x}} \\ &= -e^{-x} \operatorname{arccot}(e^x) - \frac{1}{2} [2x - \ln(1+e^{2x})] + C = -e^{-x} \operatorname{arccot}(e^x) - x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1759 题的结果.

$$\text{【1833】 } \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$$

提示 $\frac{1}{\sin^2 x} dx = -d(\cot x)$, 使用分部积分法后, 并利用 1751 题的结果.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx &= - \int \ln(\sin x) d(\cot x) = -\cot x \ln(\sin x) + \int \cot^2 x dx \\ &= -\cot x \ln(\sin x) + (-\cot x - x) + C = -[x + \cot x \ln(\sin x)] + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1649 题或 1751 题的结果.

$$\text{【1834】 } \int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

提示 仿 1833 题, 并利用 1697 题的结果.

$$\text{解 } \int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C.$$

*) 利用 1697 题的结果.

$$\text{【1835】 } \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx &= - \int x e^x d\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{x}{1+x} e^x + \int \frac{1}{1+x} e^x (x+1) dx = -\frac{x}{1+x} e^x + e^x + C \\ &= \frac{e^x}{1+x} + C. \end{aligned}$$

下列积分的求法需要把二次三项式化成标准形式, 并利用下列公式:

$$\text{I. } \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0);$$

$$\text{III. } \int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C;$$

$$\text{IV. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$\text{V. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$\text{VI. } \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C;$$

$$\text{VI. } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$\text{VII. } \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

求下列积分:

$$\text{【1836】}^+ \int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (ab \neq 0).$$

解 当 $ab > 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \operatorname{sgn} a \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|x})}{(\sqrt{|a|})^2 + (\sqrt{|b|x})^2} = \operatorname{sgn} a \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) + C,$$

$$\begin{aligned} \text{当 } ab < 0 \text{ 时, } \int \frac{dx}{a+bx^2} &= \operatorname{sgn} a \int \frac{dx}{|a| - |b|x^2} = \operatorname{sgn} a \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|x})}{(\sqrt{|a|})^2 - (\sqrt{|b|x})^2} \\ &= \frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1837】} \int \frac{dx}{x^2 - x + 2}.$$

$$\text{解 } \int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.$$

$$\text{【1838】} \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \ln \left| \frac{\frac{2}{3} + \left(x - \frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3} - \left(x - \frac{1}{3}\right)} \right| + C_1 = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{3x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1839】} \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1}.$$

$$\text{解 } \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - (\sqrt{2} + 1)}{x^2 + (\sqrt{2} - 1)} \right| + C.$$

$$\text{【1840】} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1841】} \int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos a + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos a + 1} &= \int \frac{x - \cos a + \cos a}{(x - \cos a)^2 + \sin^2 a} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d[(x - \cos a)^2 + \sin^2 a]}{(x - \cos a)^2 + \sin^2 a} + \cos a \int \frac{d(x - \cos a)}{(x - \cos a)^2 + \sin^2 a} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos a + 1) + \cot a \cdot \arctan \left(\frac{x - \cos a}{\sin a} \right) + C \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

【1842】 $\int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2}.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d(x^2)}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} + \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln(x^4 - x^2 + 2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{7}}\right) + C. \end{aligned}$$

【1843】 $\int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}.$

提示 如果本题不化成标准形式来做,则可有更简单的做法,只需注意

$$\frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3 d(x^3)}{(x^3 - 2)(x^3 + 1)} = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{x^3 - 2} + \frac{1}{x^3 + 1} \right) d(x^3),$$

即易获解.

解
$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2} &= \frac{1}{3} \int \frac{x^3 d(x^3)}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{3} \int \frac{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} - \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{6} \ln|x^6 - x^3 - 2| - \frac{1}{18} \ln \left| \frac{\frac{3}{2} + \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2} - \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)} \right| + C = \frac{1}{9} \ln\{|x^3 + 1|(x^3 - 2)^2\} + C. \end{aligned}$$

如果本题不化成标准形式来作,则有更简单的作法,事实上,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2} &= \frac{1}{3} \int \frac{x^3 d(x^3)}{(x^3 - 2)(x^3 + 1)} = \frac{1}{9} \int \left(\frac{2}{x^3 - 2} + \frac{1}{x^3 + 1} \right) d(x^3) \\ &= \frac{1}{9} \ln\{|x^3 + 1|(x^3 - 2)^2\} + C. \end{aligned}$$

【1844】 $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x} &= \int \frac{d(\tan x)}{3\tan^2 x - 8\tan x + 5} = \frac{1}{3} \int \frac{d\left(\tan x - \frac{4}{3}\right)}{\left(\tan x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{3} - \left(\tan x - \frac{4}{3}\right)}{\frac{1}{3} + \left(\tan x - \frac{4}{3}\right)} \right| + C_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3\sin x - 5\cos x}{\sin x - \cos x} \right| + C. \end{aligned}$$

【1845】 $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}.$

解
$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx}{2\tan \frac{x}{2} + 4 + \sec^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\left(\tan \frac{x}{2} + 1\right)^2 + 4} = \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{2} \right) + C.$$

【1846】 $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad (b \neq 0).$

解 当 $b > 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln |x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}| + C;$$

当 $a > 0$ 及 $b < 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \int \frac{d(\sqrt{-b}x)}{\sqrt{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{-b}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin \left(x\sqrt{-\frac{b}{a}} \right) + C.$$

【1847】 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \arcsin \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C.$

【1848】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \ln \left| x+\frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2} \right| + C.$

注 本题即 1687 题, 注意不同的解法及不同形式的结果.

【1849】 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(x-\frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + 1} \right) + C.$

【1850】 证明: 若 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$),

则当 $a > 0$ 时, $\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C;$

当 $a < 0$ 时, $\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C.$

证 当 $a > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{y}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x+\frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} \right| + C_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C; \end{aligned}$$

当 $a < 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{y}} &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2} - \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} \right) + C. \end{aligned}$$

【1851】 $\int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}}.$

解 $\int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}} = \int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d\left[\frac{21}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$$= -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}\right) + C.$$

【1852】 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$

解 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$
 $= \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln\left(x+\frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C.$

【1853】 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$

解 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{17}{16} - \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}\right) + C.$

【1854】 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$

解 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d(x^2)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-1)d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1 + \sqrt{x^4-2x^2-1}| + C.$

【1855】 $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx.$

解 $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)d(x^2)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}}$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} + \frac{3}{4} \int \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}}$
 $= -\frac{1}{2} \sqrt{1+x^2-x^4} + \frac{3}{4} \arcsin\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}\right) + C.$

【1856】 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x+1}}.$

解 当 $x > 0$, 设 $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$, 则

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x+1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = - \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$= -\ln\left|t+\frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1}\right| + C_1 = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C_2,$$

当 $x < 0$, 设 $x = -\frac{1}{t}$, $t > 0$, 显然有

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x+1}} = -\ln\left|t-\frac{1}{2} + \sqrt{t^2-t+1}\right| + C_3 = -\ln\left|\frac{-x-2-2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C_4,$$

总之, 不论 x 为正或为负, 均有

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x+1}} = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

【1857】 $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+x-1}}.$

解 作代换 $t = \frac{1}{x}$, 则

$$x^2 \sqrt{x^2+x-1} = \operatorname{sgn} t \frac{\sqrt{-t^2+t+1}}{t^3}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是, } \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+x-1}} &= -(\operatorname{sgn} t) \int \frac{t}{\sqrt{-t^2+t+1}} dt = -(\operatorname{sgn} t) \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d(-t^2+t+1)}{\sqrt{-t^2+t+1}} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+t+1}} \right) \\ &= -(\operatorname{sgn} t) \left(-\sqrt{-t^2+t+1} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2t-1}{\sqrt{5}} \right) + C = (\operatorname{sgn} x) \left[\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{|x|} + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x-2}{x\sqrt{5}} \right) \right] + C \\ &= \frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x} + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}} \right) + C. \end{aligned}$$

其存在域为 $\left| x + \frac{1}{2} \right| > \frac{\sqrt{5}}{2}.$

*) 利用 1850 题的结果.

【1858】 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$

提示 设 $y = x+1$, 本题即转化为 1856 题的类型.

解 设 $y = x+1$, 本题即转化为 1856 题的类型. 由于解法类似, 且 $x+1$ 的符号对结果没有影响, 故仅就 $x+1 > 0$ 列出解法的主要步骤如下:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{dy}{y \sqrt{y^2-2y+2}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{\frac{2}{y^2} - \frac{2}{y} + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{y^2-2y+2}}{y\sqrt{2}} \right| + C_1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

【1859】 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$

提示 设 $x-1 = \frac{1}{t}$.

解 设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 则 $(x-1)\sqrt{x^2-2} = \frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t|t|}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$,

代入得 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = - \int \frac{\operatorname{sgn} t dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = -\operatorname{sgn} t \arcsin \left(\frac{t-1}{\sqrt{2}} \right) + C = \arcsin \left(\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}} \right) + C$
 $(|x| > \sqrt{2}).$

【1860】 $\int \frac{dx}{(x+2)^2 \sqrt{x^2+2x-5}}.$

提示 设 $x+2 = \frac{1}{t}$.

解 设 $x+2 = \frac{1}{t}$, 则 $(x+2)^2 \sqrt{x^2+2x-5} = \frac{\sqrt{1-2t-5t^2}}{t^2|t|}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$,

代入得 $\int \frac{dx}{(x+2)^2 \sqrt{x^2+2x-5}} = - \int \frac{t \operatorname{sgn} t dt}{\sqrt{1-2t-5t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\left[\left(t + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{5} \right] \operatorname{sgn} t dt}{\sqrt{\frac{6}{25} - \left(t + \frac{1}{5} \right)^2}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sgn} t \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{2}{5} t - t^2} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \operatorname{sgn} t \arcsin \left(\frac{5t+1}{\sqrt{6}} \right) + C = \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \arcsin \left(\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}} \right) + C.$

其存在域为满足不等式 $x^2 + 2x - 5 > 0$ 的一切 x 值, 即 $|x+1| > \sqrt{6}$.

【1861】 $\int \sqrt{2+x-x^2} dx.$

解 $\int \sqrt{2+x-x^2} dx = \int \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} d\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right) + C.$

【1862】 $\int \sqrt{2+x+x^2} dx.$

解 $\int \sqrt{2+x+x^2} dx = \int \sqrt{\frac{7}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} d\left(x + \frac{1}{2}\right)$
 $= \frac{2x+1}{4} \sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{2+x+x^2}\right) + C.$

【1863】 $\int \sqrt{x^4+2x^2-1} x dx.$

解 $\int \sqrt{x^4+2x^2-1} x dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{(x^2+1)^2-2} d(x^2+1)$
 $= \frac{x^2+1}{4} \sqrt{x^4+2x^2-1} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1 + \sqrt{x^4+2x^2-1}) + C.$

【1864】 $\int \frac{1-x+x^2}{x \sqrt{1+x-x^2}} dx.$

解 由于 $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x-x^2}} = -\ln \left| \frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x} \right| + C_1$ (可仿照 1856 题求得),

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2,$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} d\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_3,$$

所以, $\int \frac{1-x+x^2}{x \sqrt{1+x-x^2}} dx = \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$
 $= -\ln \left| \frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x} \right| + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{1+x-x^2} + C.$

其中存在域为满足不等式 $1+x-x^2 > 0$ 且 $x \neq 0$ 的一切 x 值, 即 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ 及 $x \neq 0$.

【1865】 $\int \frac{x^2+1}{x \sqrt{x^4+1}} dx.$

提示 注意 $\frac{x^2+1}{x \sqrt{x^4+1}} dx = \frac{\operatorname{sgn} x \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx = \frac{\operatorname{sgn} x d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}}.$

解 $\int \frac{x^2+1}{x \sqrt{x^4+1}} dx = \int \frac{\operatorname{sgn} x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx = \int \frac{\operatorname{sgn} x d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} = \operatorname{sgn} x \ln \left(x - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}\right) + C_1$
 $= \ln \left| \frac{x^2-1 + \sqrt{x^4+1}}{x} \right| + C.$

§ 2. 有理函数的积分法

利用待定系数法,求下列积分:

【1866】 $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx.$

解题思路 注意被积函数分解成部分分式 $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$, 经通分后得恒等式 $2x+3 \equiv A(x+5) + B(x-$

$2)$, 令 $x=2$ 及 $x=-5$, 求得 A, B .

解 设 $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$, 通分后应有 $2x+3 \equiv A(x+5) + B(x-2)$. 在这恒等式中,

令 $x=2$, 得 $7=7A$, $A=1$; 令 $x=-5$, 得 $-7=-7B$, $B=1$.

于是, $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5} \right) dx = \ln |(x-2)(x+5)| + C.$

*) 注意, 这是一种习惯的说法, 实际上, 不能直接令 $x=2$ (因为上述恒等式是当 $x \neq 2, x \neq -5$ 时得出来的), 而应令 $x \rightarrow 2$ 取极限, 得 $7=7A$, 以下类似情况都作此理解, 不再一一说明.

【1867】 $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

解 设 $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$, 通分后应有 $x \equiv A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$. 在这恒等式中,

令 $x=-1$, 得 $-1=2A$, $A=-\frac{1}{2}$; 令 $x=-2$, 得 $-2=-B$, $B=2$;

令 $x=-3$, 得 $-3=2C$, $C=-\frac{3}{2}$.

于是, $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+3} \right) dx$
 $= -\frac{1}{2} \ln |x+1| + 2 \ln |x+2| - \frac{3}{2} \ln |x+3| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right| + C.$

【1868】 $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} dx.$

解 $\frac{x^{10}}{x^2+x-2} = x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 + \frac{-341x+342}{x^2+x-2},$

设 $\frac{-341x+342}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$, 通分后应有 $-341x+342 \equiv A(x-1) + B(x+2)$. 在这恒等式中,

令 $x=-2$, 得 $1024=-3A$, $A=-\frac{1024}{3}$; 令 $x=1$, 得 $1=3B$, $B=\frac{1}{3}$.

于是, $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} dx = \int \left[x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 - \frac{1024}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)} \right] dx$
 $= \frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{(x+2)^{1024}} \right| + C.$

【1869】 $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx.$

解 $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)},$

设 $\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$, 通分后应有 $5x^2-6x+1 \equiv A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$. 在这恒等式中,

令 $x=0$, 得 $1=6A$, $A=\frac{1}{6}$; 令 $x=2$, 得 $9=-2B$, $B=-\frac{9}{2}$; 令 $x=3$, 得 $28=3C$, $C=\frac{28}{3}$.

于是,
$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx = \int \left[1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)} \right] dx$$
$$= x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C.$$

【1870】
$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx.$$

提示 可不用代入法, 而用比较恒等式两端 x 的同次幂的系数, 解方程组求得待定系数 (当然, 首先将被积函数化为真分式).

解
$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1 + \frac{-(5x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

设 $\frac{-(5x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+4}$, 通分后应有 $-(5x^2+4) \equiv (A_1x+B_1)(x^2+4) + (A_2x+B_2)(x^2+1)$. 比较等式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A_1 + A_2 = 0, \\ x^2 & B_1 + B_2 = -5, \\ x^1 & 4A_1 + A_2 = 0, \\ x^0 & 4B_1 + B_2 = -4. \end{array}$$

由此, $A_1=0$, $B_1=\frac{1}{3}$, $A_2=0$, $B_2=-\frac{16}{3}$. 于是,

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx = \int \left[1 + \frac{1}{3(x^2+1)} - \frac{16}{3(x^2+4)} \right] dx = x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2} + C.$$

【1871】
$$\int \frac{x dx}{x^3-3x+2}.$$

解
$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2},$$
 通分后应有 $x \equiv A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$. 在这恒等式中,

令 $x=1$, 得 $1=3B$, $B=\frac{1}{3}$; 令 $x=-2$, 得 $-2=9C$, $C=-\frac{2}{9}$;

比较 x^2 的系数, 得 $A+C=0$, 从而, $A=\frac{2}{9}$. 于是,

$$\int \frac{x dx}{x^3-3x+2} = \int \left[\frac{2}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{2}{9(x+2)} \right] dx = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

【1872】
$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$$

解 设 $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$, 通分后应有 $x^2+1 \equiv A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2$. 在这恒等式中,

令 $x=-1$, 得 $2=-2B$, $B=-1$; 令 $x=1$, 得 $2=4C$, $C=\frac{1}{2}$;

比较 x^2 的系数, 得 $A+C=1$. 从而, $A=\frac{1}{2}$. 于是,

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx = \int \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)} \right] dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

【1873】
$$\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2} \right)^2 dx.$$

解
$$\left(\frac{x}{x^2-3x+2} \right)^2 = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2},$$

通分后应有 $x^2 \equiv A(x-1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 + C(x-2)(x-1)^2 + D(x-1)^2$. 在这恒等式中,

令 $x=1$, 得 $B=1$; 令 $x=2$, 得 $D=4$; 比较 x^3 及 x^2 的系数, 得

$$A+C=0 \quad \text{及} \quad -5A+B-4C+D=1;$$

由此, $A=4$, $C=-4$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x}{x^2-3x+2} \right)^2 dx &= \int \left[\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right] dx \\ &= 4\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 4\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + C = 4\ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{5x-6}{x^2-3x+2} + C. \end{aligned}$$

【1874】 $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$

提示 为了求得待定系数, 可同时使用代入法及比较等式两端 x 的同次幂的系数, 这样做, 可减少确定待定系数的计算工作量.

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3},$

通分后应有

$$1 \equiv A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+2)(x+3)^3 + C(x+1)(x+3)^3 + D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2 + E(x+1)(x+2)^2(x+3) + F(x+1)(x+2)^2.$$

在这恒等式中,

令 $x=-1$, 得 $1=8A$, $A=\frac{1}{8}$; 令 $x=-2$, 得 $1=-C$, $C=-1$; 令 $x=-3$, 得 $1=-2F$, $F=-\frac{1}{2}$;

比较 x^5 , x^4 及 x^3 的系数, 得

$$\begin{cases} x^5 & A+B+D=0, \\ x^4 & 13A+12B+C+11D+E=0, \\ x^3 & 67A+56B+10C+47D+8E+F=0. \end{cases}$$

由此, $B=2$, $D=-\frac{17}{8}$, $E=-\frac{5}{4}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} &= \int \left[\frac{1}{8(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{17}{8(x+3)} - \frac{5}{4(x+3)^2} - \frac{1}{2(x+3)^3} \right] dx \\ &= \frac{1}{8} \ln|x+1| + 2\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} - \frac{17}{8} \ln|x+3| + \frac{5}{4(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2} + C \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}} \right| + \frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + C. \end{aligned}$$

【1875】 $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}.$

解 $\frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3},$

通分后应有 $1 \equiv A(x-1)(x+1)^3 + B(x+1)^3 + C(x-1)^2(x+1)^2 + D(x-1)^2(x+1) + E(x-1)^2$. 在这恒等式中,

令 $x=1$, 得 $1=8B$, $B=\frac{1}{8}$; 令 $x=-1$, 得 $1=4E$, $E=\frac{1}{4}$; 令 $x=0$, 得 $-A+B+C+D+E=1$;

令 $x=2$, 得 $27A+27B+9C+3D+E=1$; 令 $x=-2$, 得 $3A-B+9C-9D+9E=1$;

由此, $A=-\frac{3}{16}$, $C=\frac{3}{16}$, $D=\frac{1}{4}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1} &= \int \left[-\frac{3}{16(x-1)} + \frac{1}{8(x-1)^2} + \frac{3}{16(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^3} \right] dx \\ &= -\frac{3}{16} \ln|x-1| - \frac{1}{8(x-1)} + \frac{3}{16} \ln|x+1| - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{8(x+1)^2} + C \\ &= \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2} + C. \end{aligned}$$

【1876】 $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx.$

解 设 $\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$, 通分后应有

$$x^2+5x+4 \equiv (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & B+D=1, \\ x^1 & 4A+C=5, \\ x^0 & 4B+D=4. \end{array}$$

由此, $A = \frac{5}{3}$, $B=1$, $C = -\frac{5}{3}$, $D=0$. 于是,

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx = \int \left(\frac{\frac{5}{3}x+1}{x^2+1} + \frac{-\frac{5}{3}x}{x^2+4} \right) dx = \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4} + \arctan x + C.$$

本题如不直接用待定系数法将被积函数进行分解, 而使用其他技巧, 也可有更简单的方法. 事实上,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx &= \int \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + 5 \int \frac{x dx}{(x^2+4)(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2+4)(x^2+1)} \\ &= \arctan x + \frac{5}{6} \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right) d(x^2) = \arctan x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4} + C. \end{aligned}$$

【1877】 $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$, 通分后应有 $1 \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$. 比较等式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} &= \int \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)} \right] dx = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

【1878】 $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$

提示 本题若用待定系数法, 较麻烦一些. 可将被积函数变形为 $\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)^2+1}$ 后, 即易获解.

解 由于 $\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{(x^2-4x+5) - (x^2-4x+4)}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-4x+5},$

$$\begin{aligned} \text{于是, } \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} &= \int \left[\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-4x+5} \right] dx = -\frac{1}{x-2} - \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1} \\ &= -\frac{1}{x-2} - \arctan(x-2) + C. \end{aligned}$$

本题若用待定系数法, 较麻烦一些, 也可获得同样的结果, 此处从略.

【1879】 $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$

解 设 $\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$, 通分后应有

$$x \equiv A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & A+B-2C+D=0, \\ x^1 & 2B+C-2D=1, \\ x^0 & -2A+2B+D=0. \end{array}$$

由此 $A = \frac{1}{25}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = -\frac{1}{25}$, $D = -\frac{8}{25}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} &= \int \left[\frac{1}{25(x-1)} + \frac{1}{5(x-1)^2} - \frac{x+8}{25(x^2+2x+2)} \right] dx \\ &= \frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \frac{7}{25} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50} \ln(x^2+2x+2) - \frac{7}{25} \arctan(x+1) + C \\ &= \frac{1}{50} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{7}{25} \arctan(x+1) + C. \end{aligned}$$

【1880】 $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}.$

解 设 $\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$, 通分后应有

$$1 \equiv A(x+1)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + x(x+1)(Cx+D).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+B+C=0, \\ x^2 & 2A+B+C+D=0, \\ x^1 & 2A+B+D=0, \\ x^0 & A=1. \end{array}$$

由此, $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-1$. 于是,

$$\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+x^2} \right) dx = \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

本题也可以不用待定系数法. 事实上,

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{(x+x^2)(1+x+x^2)} = \frac{1}{x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+x^2}.$$

【1881】 $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

解 设 $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$, 通分后应有 $1 \equiv A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$. 比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & -A+B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \left[\frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)} \right] dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

【1882】 $\int \frac{x dx}{x^3-1}.$

解 设 $\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$, 通分后应有 $x \equiv A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$. 比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{cases} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & A-B+C=1, \\ x^0 & A-C=0. \end{cases}$$

由此, $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^3-1} dx &= \int \left[\frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

【1883】 $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

提示 本题若用待定系数法, 较麻烦一些. 可将被积函数变形为 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} \right)$ 后, 即易获解.

解 $\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C.$

本题若用待定系数法, 则较麻烦. 从略.

【1884】 $\int \frac{dx}{x^4+1}$

解题思路 本题若用待定系数法, 较麻烦一些. 可将被积函数变形为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x^2+1}{x^4+1} - \frac{x^2-1}{x^4+1} \right),$$

然后利用 1712 题及 1713 题的结果, 并注意

$$\arctan \left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right),$$

即可获得所需的答案.

解 本题如用待定系数法来作, 主要步骤如下:

设 $\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$, 经计算可求得 $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $D = \frac{1}{2}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+1} &= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx + \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} [\ln(x^2+x\sqrt{2}+1) - \ln(x^2-x\sqrt{2}+1)] + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\arctan \left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) + \arctan \left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right] + C \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

如应用下列解法,则更简单些.

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^{**}) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + C_1,$$

注意到 $\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$, 最后即得

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + C.$$

*) 利用 1712 题的结果.

**) 利用 1713 题的结果.

【1885】 $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$

解 设 $\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$, 通分后应有 $1 \equiv (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+x+1)$.

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & -A+B+C+D=0, \\ x^1 & A-B+C+D=0, \\ x^0 & B+D=1. \end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{2}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+x^2+1} &= \int \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x^2+x+1} dx - \int \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{4} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{4} [\ln(x^2+x+1) - \ln(x^2-x+1)] + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right] + C_1 \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}\right) + C_1 = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

如不用待定系数法解本题, 则更简单些, 解法与上题类似:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+x^2+1} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + C. \end{aligned}$$

【1886】 $\int \frac{dx}{x^6+1}.$

解 本题如用待定系数法来作, 运算较麻烦, 经计算可得

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1} + \frac{\frac{-\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1},$$

积分步骤与 1884 题与 1885 题完全类似, 不再详解, 其结果为

$$\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{6} \arctan(x^3) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + C.$$

本题如不用待定系数法来作,则更简单些.下面列举两种解法:

解法 1:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^6+1} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^4-1}{x^6+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+(x^4-x^2+1)}{x^6+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^6+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} dx = \frac{1}{6} \int \frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2} + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3} \\ &= \frac{1}{6} \arctan(x^3) + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1} + C. \end{aligned}$$

解法 2: 仿照 1881 题的分解法, 可得

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{1}{3(x^2+1)} - \frac{x^2-2}{3(x^4-x^2+1)}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^6+1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3} \int \frac{(x^2-2)dx}{x^4-x^2+1} \\ &= \frac{1}{3} \arctan x - \frac{1}{6} \int \frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x^4-x^2+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \arctan x + \frac{1}{6} \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \arctan x + \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3} \\ &= \frac{1}{3} \arctan x + \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1} + C. \end{aligned}$$

两种答案形式不同, 实质上是一致的.

【1887】 $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$

解 设 $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1}$, 通分后应有

$$1 = A(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1) + B(x^2+1)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1) + (Ex+F)(x+1)^2(x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^5 & A+C+E=0, \\ x^4 & B+C+D+2E+F=0, \\ x^3 & A-B+D+2E+2F=0, \\ x^2 & A+2B+C+2E+2F=0, \\ x^1 & -B+C+D+E+2F=0, \\ x^0 & A+B+D+F=1. \end{array}$$

由此, $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{6}$, $C=0$, $D=\frac{1}{2}$, $E=-\frac{1}{3}$, $F=0$. 于是,

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \int \left[\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{6(x+1)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{x}{3(x^2-x+1)} \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \ln |1+x| - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{6} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} - \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C.
\end{aligned}$$

【1888】 $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}.$

解 设 $\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1},$

通分后应有 $1 \equiv A(x^2+x+1)(x^2-x+1) + (Bx+C)(x-1)(x^2-x+1) + (Dx+E)(x-1)(x^2+x+1).$

比较等式两端 x 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{l|l}
x^4 & A+B+D=0, \\
x^3 & -2B+C+E=0, \\
x^2 & A+2B-2C=0, \\
x^1 & -B+2C-D=0, \\
x^0 & A-C-E=1.
\end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{1}{6}, D = 0, E = -\frac{1}{2}.$ 于是,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} &= \int \left[\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2x+1}{6(x^2-x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)} \right] dx \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C.
\end{aligned}$$

【1889】 $\int \frac{x^2 dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}.$

解 设 $\frac{x^2}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+\frac{1}{2}},$ 通分后应有

$$x^2 \equiv (Ax+B)(x^2+x+\frac{1}{2}) + (Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & A+C=0, \\
x^2 & A+B+2C+D=1, \\
x^1 & \frac{A}{2}+B+2C+2D=0, \\
x^0 & \frac{B}{2}+2D=0.
\end{array}$$

由此, $A = \frac{4}{5}, B = \frac{12}{5}, C = -\frac{4}{5}, D = -\frac{3}{5}.$ 于是,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1} &= \int \left[\frac{4(x+3)}{5(x^2+2x+2)} - \frac{4x+3}{5(x^2+x+\frac{1}{2})} \right] dx \\
&= \frac{2}{5} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2} + \frac{8}{5} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} - \frac{2}{5} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{5} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{2}{5} \ln \frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}} + \frac{8}{5} \arctan(x+1) - \frac{2}{5} \arctan(2x+1) + C.
\end{aligned}$$

【1890】 在什么条件下, 积分 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} dx$ 为有理函数?

解 设 $\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}$, 通分后应有

$$ax^2+bx+c \equiv Ax^2(x-1)^2+Bx(x-1)^2+C(x-1)^2+Dx^3(x-1)+Ex^3.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A+D=0, \\ x^3 & -2A+B-D+E=0, \\ x^2 & A-2B+C=a, \\ x^1 & B-2C=b, \\ x^0 & C=c. \end{array}$$

由此, $A=a+2b+3c, B=b+2c, C=c, D=-(a+2b+3c), E=a+b+c$. 当 $A=D=0$, 即 $a+2b+3c=0$ 时, 积分 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} dx$ 为有理函数.

利用奥斯特罗格拉茨基方法*, 求积分:

【1891】 $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3}.$

解 $Q=(x-1)^2(x+1)^3, Q_1=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1, Q_2=(x-1)(x+1)=x^2-1.$

设 $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-x-1} \right)' + \frac{Dx+E}{x^2-1}$, 从而,

$$x \equiv (2Ax+B)(x-1)(x+1) - (3x-1)(Ax^2+Bx+C) + (Dx+E)(x-1)(x+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^4 & D=0, \\ x^3 & -A+D+E=0, \\ x^2 & A-2B-D+E=0, \\ x^1 & -2A+B-3C-D-E=1, \\ x^0 & -B+C-E=0. \end{array}$$

由此, $A=-\frac{1}{8}, B=-\frac{1}{8}, C=-\frac{1}{4}, D=0, E=-\frac{1}{8}$. 于是,

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C.$$

【1892】 $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}.$

* 所谓奥斯特罗格拉茨基方法, 是指关于有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分, 可以借助代数方法来分离成一个真分式与另一个真分式积分的和, 使在新的被积真分式函数中, 其分母次数达到最低状态, 也即在公式

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx \quad (1)$$

中, 如果 $P(x), Q(x)$ 已知, 且设分母 $Q(x)$ 可以分解成一次与二次类型的实因式:

$$Q(x) = (x-a)^k \cdots (x^2+px+q)^m \cdots,$$

其中 k, \dots, m, \dots 是正整数. 在公式(1)的右端分母已知, 形如:

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1} \cdots (x^2+px+q)^{m-1} \cdots, Q_2(x) = (x-a) \cdots (x^2+px+q) \cdots,$$

且满足 $Q_1(x) \cdot Q_2(x) = Q(x)$. 而 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 为相应比 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 更低次的多项式, 一般可用待定系数法求得. 这种利用公式(1)求积分的方法, 就是所谓的奥斯特罗格拉茨基方法. 详细可以参见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著(北京大学译), 微积分学教程, 第二卷一分册, 第 264 目.

——《题解》作者注

提示 令 $\frac{1}{(x^3+1)^2} = \left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)' + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$, 并利用 1881 题的结果.

解 $Q=(x+1)^2(x^2-x+1)^2$, $Q_1=Q_2=x^3+1$.

设 $\frac{1}{(x^3+1)^2} = \left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)' + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$, 从而,

$$1 \equiv (2Ax+B)(x^3+1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) + (Dx^2+Ex+F)(x^3+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^5 & D=0, \\ x^4 & -A+E=0, \\ x^3 & -2B+F=0, \\ x^2 & -3C+D=0, \\ x^1 & 2A+E=0, \\ x^0 & B+F=1. \end{array}$$

由此, $A=0$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=0$, $E=0$, $F=\frac{2}{3}$. 于是,

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

*) 利用 1881 题的结果.

【1893】 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

解 $Q=(x^2+1)^3$, $Q_1=(x^2+1)^2$, $Q_2=x^2+1$.

设 $\frac{1}{(x^2+1)^3} = \left[\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right]' + \frac{Ex+F}{x^2+1}$, 从而,

$$1 \equiv (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1) - 4x(Ax^3+Bx^2+Cx+D) + (Ex+F)(x^2+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^5 & E=0, \\ x^4 & -A+F=0, \\ x^3 & -2B+2E=0, \\ x^2 & 3A-3C+2F=0, \\ x^1 & 2B-4D+E=0, \\ x^0 & C+F=1. \end{array}$$

由此, $A=\frac{3}{8}$, $B=0$, $C=\frac{5}{8}$, $D=0$, $E=0$, $F=\frac{3}{8}$. 于是,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \arctan x + C.$$

【1894】 $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2}.$

提示 本题如不用奥斯特罗格拉茨基方法, 可有更简单的方法. 事实上, 有

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{(x^2+2x+2) - (2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}.$$

解 $Q=(x^2+2x+2)^2$, $Q_1=Q_2=x^2+2x+2$.

设 $\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}\right)' + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$, 从而,

$$x^2 \equiv A(x^2+2x+2) - 2(x+1)(Ax+B) + (Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & C=0, \\ x^2 & -A+2C+D=1, \\ x^1 & -2B+2C+2D=0, \\ x^0 & 2A-2B+2D=0. \end{array}$$

由此, $A=0, B=1, C=0, D=1$. 于是,

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1) + C.$$

本题如不用奥斯特罗格拉茨基方法, 则更容易得出上述结果. 事实上,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2} &= \int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+2)^2} \\ &= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} - \int \frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} + C. \end{aligned}$$

【1895】 $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}.$

解 $Q=(x^4+1)^2, Q_1=Q_2=x^4+1,$

设 $\frac{1}{(x^4+1)^2} = \left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1} \right)' + \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}$, 从而,

$$1 \equiv (3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1) - 4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D) + (Ex^3+Fx^2+Gx+H)(x^4+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^7 & E=0, \\ x^6 & -A+F=0, \\ x^5 & -2B+G=0, \\ x^4 & -3C+H=0, \\ x^3 & -4D+E=0, \\ x^2 & 3A+F=0, \\ x^1 & 2B+G=0, \\ x^0 & C+H=1. \end{array}$$

由此, $A=0, B=0, C=\frac{1}{4}, D=0, E=0, F=0, G=0, H=\frac{3}{4}$. 于是,

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{3}{8\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + C.$$

*) 利用 1884 题的结果.

【1896】 $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$

解 $Q=(x-1)(x^2+x+1)^2, Q_1=x^2+x+1, Q_2=(x-1)(x^2+x+1).$

设 $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1} \right)' + \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-1)(x^2+x+1)}$, 从而,

$$x^2+3x-2 \equiv A(x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(Ax+B)(x-1) + (Cx^2+Dx+E)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^4 & C=0, \\ x^3 & -A+C+D=0, \\ x^2 & A-2B+C+D+E=1, \\ x^1 & A+B+D+E=3, \\ x^0 & -A+B+E=-2. \end{array}$$

由此, $A = \frac{5}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = 0$, $D = \frac{5}{3}$, $E = -1$, 再将 $\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ 分解, 可得

$$\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{9(x-1)} - \frac{2x-11}{9(x^2+x+1)}.$$

于是,
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx &= \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{9} \int \frac{2x-11}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{9} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{4}{3} \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

【1897】 $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}.$

解 $Q = (x^4-1)^3$, $Q_1 = (x^4-1)^2$, $Q_2 = x^4-1$.

设 $\frac{1}{(x^4-1)^3} = \left[\frac{P(x)}{(x^4-1)^2} \right]' + \frac{P_1(x)}{x^4-1}$, 其中

$$P(x) = Ax^7 + Bx^5 + Cx^3 + Dx + E, \quad P_1(x) = A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1,$$

从而, 利用待定系数法, 解出 $A=0$, $B=0$, $C=\frac{7}{32}$, $D=0$, $E=0$, $F=0$, $G=-\frac{11}{32}$, $H=0$, $A_1=0$, $B_1=0$,

$C_1=0$, $D_1=\frac{21}{32}$. 于是,

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{7x^3-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{32} \int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{7x^3-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{21}{64} \arctan x^{*}) + C.$$

*) 利用 1883 题的结果.

分出下列积分的代数部分:

【1898】 $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx.$

解 设 $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1} + \int \frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x^4+x^2+1} dx.$

上述等式右端的积分为非代数部分, 因此, 只需要求出 A, B, C, D 就可以了. 等式两端求导并通分, 得

$$x^2+1 \equiv (3Ax^2+2Bx+C)(x^4+x^2+1) - (4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D) + (A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1) \cdot (x^4+x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 解出 $A=\frac{1}{6}$, $B=0$, $C=\frac{1}{3}$, $D=0$, $A_1=0$, $B_1=\frac{1}{6}$, $C_1=0$, $D_1=\frac{2}{3}$. 因此,

所求积分的代数部分为 $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}.$

【1899】⁺ $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}.$

解 设 $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3} = \frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^3+x+1)^2} + \int \frac{Gx^2+Hx+L}{x^3+x+1} dx.$

对上述等式两端求导并通分, 得

$$1 \equiv (5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(x^3+x+1) - 2(3x^2+1)(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F) + (Gx^2+Hx+L)(x^3+x+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 解出 $A=-\frac{243}{961}$, $B=\frac{357}{1922}$, $C=-\frac{405}{961}$, $D=-\frac{315}{1922}$, $E=\frac{156}{961}$, $F=-\frac{224}{961}$,

$G=0$, $H=-\frac{243}{961}$, $L=\frac{357}{961}$. 因此, 所求积分的代数部分为

$$-\frac{486x^5-357x^4+810x^3+315x^2-312x+448}{1922(x^3+x+1)^2}.$$

【1900】 $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2} dx.$

解 设 $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2} dx = \frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1} + \int \frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Lx+M}{x^5+x+1} dx.$

对上述等式两端求导再通分,得

$$4x^5-1 \equiv (4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)(x^5+x+1) - (5x^4+1)(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E) + (Fx^4+Gx^3+Hx^2+Lx+M)(x^5+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,解出 $A=0, B=0, C=0, D=-1, E=0, F=0, G=0, H=0, L=0, M=0.$

因此,所求积分的代数部分为 $-\frac{x}{x^5+x+1}$ (全部积分).

【1901】 计算积分 $\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$

解 $Q=x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2, Q_1=Q_2=x^2+x+1.$

设 $\frac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)' + \frac{Cx+D}{x^2+x+1},$ 从而,

$$1 \equiv A(x^2+x+1) - (2x+1)(Ax+B) + (Cx+D)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,解出 $A=\frac{2}{3}, B=\frac{1}{3}, C=0, D=\frac{2}{3}.$ 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} &= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

【1902】 在什么条件下,积分 $\int \frac{ax^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2} dx$ 为有理函数?

解 (1) 当 $a \neq 0$ 且 $b^2-ac=0$ 时, $ax^2+2bx+c=a(x-x_0)^2$, 其中 x_0 为实数. 此时

$$\begin{aligned} \frac{ax^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2} &= \frac{a(x-x_0)^2+2ax_0(x-x_0)+ax_0^2+2\beta(x-x_0)+2\beta x_0+\gamma}{a^2(x-x_0)^4} \\ &= \frac{a}{a^2(x-x_0)^2} + \frac{2ax_0+2\beta}{a^2(x-x_0)^3} + \frac{ax_0^2+2\beta x_0+\gamma}{a^2(x-x_0)^4}. \end{aligned}$$

从而,积分为有理函数.

(2) 当 $a \neq 0$ 且 $b^2-ac \neq 0$ 时,则设

$$\frac{ax^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2} = \left(\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}\right)' + \frac{Cx+D}{ax^2+2bx+c},$$

从而, $ax^2+2\beta x+\gamma \equiv A(ax^2+2bx+c) - (2ax+2b)(Ax+B) + (Cx+D)(ax^2+2bx+c).$

比较等式两端 x 的同次幂系数,可解得 $C=0, D=\frac{2b\beta-a\gamma-ca}{2(b^2-ac)}.$ 从而,当 $a\gamma+ca=2b\beta$ 时 $D=0$,此时积分为有理函数.

(3) 当 $a=0, b \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{ax^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2} &= \frac{a\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{ac}{b}\left(x+\frac{c}{2b}\right) + \frac{ac^2}{4b^2} + 2\beta\left(x+\frac{c}{2b}\right) - \frac{\beta c}{b} + \gamma}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2} \\ &= \frac{a}{4b^2} + \frac{2\beta - \frac{ac}{b}}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)} + \frac{\frac{ac^2}{4b^2} - \frac{\beta c}{b} + \gamma}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2}. \end{aligned}$$

故当 $2\beta - \frac{ac}{b} = 0$ 即 $ac = 2b\beta$ 时, 积分为有理函数. 这种情况可归并到 $a\gamma + c\alpha = 2b\beta$ 中去.

(4) 当 $a = b = 0, c \neq 0$ 时, 积分显然为有理函数. 这种情况可归并到 $b^2 - ac = 0$ 中去.

综上所述, 当 $b^2 - ac = 0$ 或 $a\gamma + c\alpha = 2b\beta$ 时, 积分为有理函数.

利用不同方法, 计算下列积分:

【1903】 $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx.$

解 $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx = \int \frac{[(x-1)+1]^3}{(x-1)^{100}} dx = \int \left[\frac{1}{(x-1)^{97}} + \frac{3}{(x-1)^{98}} + \frac{3}{(x-1)^{99}} + \frac{1}{(x-1)^{100}} \right] dx$
 $= -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C$

【1904】 $\int \frac{x dx}{x^8 - 1}.$

提示 利用 1883 题的结果.

解 $\int \frac{x dx}{x^8 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^4 - 1} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| - \frac{1}{4} \arctan(x^2)^{*}) + C.$

*) 利用 1883 题的结果.

【1905】 $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 3}.$

解 $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 3} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2 + 3} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{3}}\right) + C.$

【1906】 $\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx.$

提示 注意 $\frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{3} \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{d(x^2)}{(x^2)^3 + 1}$, 并利用 1881 题的结果.

解 $\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^3 + 1}$
 $= \frac{1}{3} \arctan(x^3) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 - x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{3}}\right) \right]^{**}) + C$
 $= \frac{1}{3} \arctan(x^3) + \frac{1}{12} \ln \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 - x^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

*) 利用 1881 题的结果.

【1907】 $\int \frac{x^4 - 3}{x(x^5 + 3x^4 + 2)} dx.$

解 $\int \frac{x^4 - 3}{x(x^5 + 3x^4 + 2)} dx = \int \frac{\left(1 - \frac{3}{x^4}\right) dx}{x^5 \left(1 + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^5}\right)} = \int \frac{-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{x^4}\right) d\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{2}{x^5} + \frac{3}{x^4} + 1}$
 $= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{5}{\frac{2}{x^4} + 1} - \frac{4}{\frac{1}{x^4} + 1} \right) d\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{5}{8} \ln\left(\frac{2}{x^4} + 1\right) + \ln\left(\frac{1}{x^4} + 1\right) + C$
 $= \frac{5}{8} \ln \frac{x^4}{x^4 + 2} - \ln \frac{x^4}{x^4 + 1} + C.$

【1908】 $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10} - 10)^2}.$

解 $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10} - 10)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5)}{[(x^5 - \sqrt{10})(x^5 + \sqrt{10})]^2} = \frac{1}{200} \int \frac{[(x^5 - \sqrt{10}) - (x^5 + \sqrt{10})]^2}{[(x^5 - \sqrt{10})(x^5 + \sqrt{10})]^2} d(x^5)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{200} \int \left(\frac{1}{x^5 - \sqrt{10}} - \frac{1}{x^5 + \sqrt{10}} \right)^2 d(x^5) = \frac{1}{200} \int \frac{d(x^5 - \sqrt{10})}{(x^5 - \sqrt{10})^2} - \frac{1}{100} \int \frac{d(x^5)}{(x^5)^2 - 10} + \frac{1}{200} \int \frac{d(x^5 + \sqrt{10})}{(x^5 + \sqrt{10})^2} \\
&= -\frac{1}{200(x^5 - \sqrt{10})} - \frac{1}{200\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^5 - \sqrt{10}}{x^5 + \sqrt{10}} \right| - \frac{1}{200(x^5 + \sqrt{10})} + C \\
&= -\frac{1}{100} \left[\frac{x^5}{x^{10} - 10} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^5 - \sqrt{10}}{x^5 + \sqrt{10}} \right| \right] + C.
\end{aligned}$$

【1909】 $\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}.$

解 $\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x^8 d(x^4)}{(x^4 + 1)(x^4 + 2)} = \frac{1}{4} \int \left[1 - \frac{3x^4 + 2}{(x^4 + 1)(x^4 + 2)} \right] d(x^4)$
 $= \frac{1}{4} \int \left[1 + \frac{1}{x^4 + 1} - \frac{4}{x^4 + 2} \right] d(x^4) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4 + 1}{(x^4 + 2)^4} + C.$

【1910】 $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}.$

解 $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{x^5 d(x^5)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} = \frac{1}{5} \int \frac{(x^5 + 1)d(x^5 + 1)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} - \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 + 1)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2}$
 $= \frac{1}{10} \int \frac{d[(x^5 + 1)^2 + 1]}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} - \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 + 1)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} = -\frac{1}{10[(x^5 + 1)^2 + 1]} - \frac{1}{5} \left\{ \frac{x^5 + 1}{2[(x^5 + 1)^2 + 1]} \right.$
 $\left. + \frac{1}{2} \arctan(x^5 + 1) \right\} + C = -\frac{x^5 + 2}{10(x^{10} + 2x^5 + 2)} - \frac{1}{10} \arctan(x^5 + 1) + C.$

*) 利用 1817 题的结果.

【1911】 $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx.$

提示 分别就 $n \neq 0$ 及 $n = 0$ 两种情况求解.

解 当 $n \neq 0$ 时,

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx = \int \frac{x^n x^{n-1} dx}{x^n + 1} = \frac{1}{n} \int \frac{x^n d(x^n)}{x^n + 1} = \frac{1}{n} \int \left(1 - \frac{1}{x^n + 1} \right) d(x^n) = \frac{1}{n} (x^n - \ln |x^n + 1|) + C;$$

当 $n = 0$ 时, $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx = \int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \ln |x| + C.$

【1912】 $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx.$

提示 当 $n \neq 0$ 时, 经恒等变形后可利用 1817 题的结果. 当 $n = 0$ 时, 易获解.

解 当 $n \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx &= \int \frac{x^{2n} x^{n-1} dx}{(x^{2n} + 1)^2} = \frac{1}{n} \int \frac{x^{2n} d(x^n)}{(x^{2n} + 1)^2} = \frac{1}{n} \int \frac{(x^{2n} + 1) - 1}{(x^{2n} + 1)^2} d(x^n) \\
&= \frac{1}{n} \int \frac{d(x^n)}{x^{2n} + 1} - \frac{1}{n} \int \frac{d(x^n)}{(x^{2n} + 1)^2} = \frac{1}{n} \arctan(x^n) - \frac{1}{n} \left[\frac{x^n}{2(x^{2n} + 1)} + \frac{1}{2} \arctan(x^n) \right] + C \\
&= \frac{1}{2n} \left[\arctan(x^n) - \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \right] + C.
\end{aligned}$$

当 $n = 0$ 时, $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \ln |x| + C.$

*) 利用 1817 题的结果.

【1913】 $\int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)}.$

解 $\int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)} = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10} + 2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{20} \int \frac{d(x^{10} + 2)}{x^{10} + 2}$
 $= \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{20} \ln(x^{10} + 2) + C = \frac{1}{20} \ln \frac{x^{10}}{x^{10} + 2} + C.$

【1914】 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}.$

提示 两次使用 $1=x^{10}+1-x^{10}$, 就可将被积函数变形为 $\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}$, 从而易获解.

解 由于

$$\frac{1}{x(x^{10}+1)^2} = \frac{x^{10}+1-x^{10}}{x(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{x(x^{10}+1)} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2},$$

所以,
$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2} \right] dx = \ln|x| - \frac{1}{10} \int \frac{d(x^{10}+1)}{x^{10}+1} - \frac{1}{10} \int \frac{d(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{10} \ln(x^{10}+1) + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + C = \frac{1}{10} \ln \frac{x^{10}}{x^{10}+1} + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + C.$$

【1915】 $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx.$

解
$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2x^6}{1+x^7} \right) dx = \ln|x| - \frac{2}{7} \int \frac{d(1+x^7)}{1+x^7} = \ln|x| - \frac{2}{7} \ln|1+x^7| + C$$

$$= \frac{1}{7} \ln \frac{|x|^7}{(1+x^7)^2} + C.$$

【1916】 $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} dx.$

解
$$\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} dx = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5-5x)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}$$

$$= \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x^5-5x} - \frac{1}{x^5-5x+1} \right) d(x^5-5x) = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5-5x)}{x^5-5x} - \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5-5x+1)}{x^5-5x+1}$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x(x^4-5x)}{x^5-5x+1} \right| + C.$$

【1917】 $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx.$

解 由于 $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2} = \frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2+x+1} \right),$

所以,
$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + C.$$

【1918】 $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1} dx.$

解
$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1} dx = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) + \left(x+\frac{1}{x}\right) + 1} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x+\frac{1}{x}\right) - 1}$$

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\right]^2 - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2} + C.$$

【1919】 $\int \frac{x^5-x}{x^8+1} dx.$

解
$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)^2-1}{(x^2)^4+1} d(x^2) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1} + C.$$

*) 利用 1713 题的结果.

【1920】 $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx.$

解 $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx = \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1} dx = \int \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} dx + \int \frac{x^2 dx}{x^6+1}$
 $= \int \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1} = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan(x^3) + C.$

【1921】 试导出用于计算积分 $I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ ($a \neq 0$) 的递推公式. 利用这个公式计算

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

解题思路 首先, 注意

$$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + (4ac-b^2) = t^2 + \Delta,$$

其中 $t=2ax+b$, $\Delta=4ac-b^2$. 这样, 原积分就变形为 $2^{2n-1} a^{n-1} \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$.

其次, 当 $\Delta \neq 0$ 时, 对积分 $\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$ 使用分部积分法, 并注意 $t^2 = t^2 + \Delta - \Delta$, 经运算即可得递推公式

$$I_n = \frac{1}{(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1}.$$

当 $\Delta=0$ 时, 易获解.

解 由于 $4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + (4ac-b^2) = t^2 + \Delta$, 其中 $t=2ax+b$, $\Delta=4ac-b^2$. 于是,

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{(4a)^n dx}{[(2ax+b)^2 + \Delta]^n} = 2^{2n-1} a^{n-1} \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}.$$

当 $\Delta \neq 0$ 时, 对于积分 $\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$ 施用分部积分法, 即有

$$\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} = \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{(t^2+\Delta)^{n+1}} = \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n \int \frac{(t^2+\Delta)-\Delta}{(t^2+\Delta)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} - 2n\Delta \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^{n+1}}.$$

若令 $\bar{I}_n = \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$, 则得 $\bar{I}_n = \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n \bar{I}_n - 2n\Delta \bar{I}_{n+1},$

或 $\bar{I}_{n+1} = \frac{1}{2n\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{\Delta} \bar{I}_n,$ 从而,

$$\bar{I}_n = \frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta} \bar{I}_{n-1}.$$

代入 I_n , 即得

$$I_n = 2^{2n-1} a^{n-1} \left\{ \frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta} \bar{I}_{n-1} \right\}$$

$$= 2^{2n-1} a^{n-1} \left\{ \frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(4a)^{n-1} (ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta} \right.$$

$$\left. \cdot \frac{2a}{(4a)^{n-1}} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \right\} = \frac{1}{(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1},$$

最后得递推公式

$$I_n = \frac{1}{(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1}.$$

当 $\Delta=0$ 时, 则有

$$I_n = \int \frac{(4a)^n dx}{(2ax+b)^{2n}} = 2^{2n-1} a^{n-1} \int \frac{d(2ax+b)}{(2ax+b)^{2n}} = \frac{1}{a^n(1-2n)} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^{1-2n} + C.$$

对于 I_3 , $\Delta \neq 0$, 两次运用上述递推公式, 即得

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

【1922】 利用代换 $t = \frac{x+a}{x+b}$ 计算积分:

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}, \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为正整数}).$$

利用这个代换, 求 $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

解 设 $t = \frac{x+a}{x+b}$, 则 $1-t = \frac{b-a}{x+b}$ 或 $x+b = \frac{b-a}{1-t}$, $dt = \frac{b-a}{(x+b)^2} dx = \frac{(1-t)^2}{b-a} dx$ 或 $dx = \frac{b-a}{(1-t)^2} dt$,

及 $x+a = t(x+b) = \frac{t(b-a)}{1-t}$, 代入 I , 即得

$$I = \frac{I}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m} dt \quad (a \neq b).$$

将 $(1-t)^{m+n-2}$ 展开, 即可分项积分求得 I .

如果 $b=a$, 则

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^{m+n}} = \frac{1}{1-m-n} (x+a)^{1-m-n} + C.$$

令 $a=-2$, $b=3$, $m=2$ 及 $n=3$, 并设 $t = \frac{x-2}{x+3}$, 即得

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{5^4} \int \frac{(1-t)^3}{t^5} dt = \frac{1}{5^4} \int \left(\frac{1}{t^5} - \frac{3}{t^4} + 3-t \right) dt = \frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} - 3 \ln |t| + 3t - \frac{t^2}{2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{625} \left[-\frac{x+3}{x-2} - 3 \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + \frac{3(x-2)}{x+3} - \frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2} \right] + C.$$

【1923】 若 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 计算 $\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx$.

提示 利用泰勒公式.

解 由于 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 故得

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

其中 $P_n^{(0)}(a) = P_n(a)$, $0! = 1$. 于是,

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(a) \int \frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}} + \frac{1}{n!} P_n^{(n)}(a) \int \frac{dx}{x-a}$$

$$= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} + \frac{1}{n!} P_n^{(n)}(a) \ln |x-a| + C,$$

其中 $\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} = a_0$ 为 $P_n(x)$ 的首项系数, 即

$$P_n(x) = a_0(x-a)^n + a_1(x-a)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x-a) + a_n.$$

【1924】⁺ 设 $R(x) = R^*(x^2)$, 其中 R^* 为有理函数, 则函数 $R(x)$ 分解为有理分式时有什么特性?

解 设 $R^*(x) = P(x) + H(x)$, 其中 $P(x)$ 是多项式; 若 $R^*(x)$ 本身也为多项式, 则 $H(x) \equiv 0$; 否则 $H(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是真分式, 而 $P_1(x), Q_1(x)$ 也均为多项式.

设 $Q_1(x)$ 有非负实根为 a_i^2 , 其重数为 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, m)$; 负根为 $-b_k^2$, 其重数为 $\beta_k (k=1, 2, \dots, t)$; 二次因式为 $x^2 + C_p x + D_p$, 其重数为 $\gamma_p (p=1, 2, \dots, s)$, 其中 $C_p^2 - 4D_p < 0$. 于是,

$$Q_1(x) = \begin{cases} a_0 \prod_{i=1}^m (x-a_i^2)^{\alpha_i} \prod_{k=1}^t (x+b_k^2)^{\beta_k} \prod_{p=1}^s (x^2+C_p x+D_p)^{\gamma_p}, & m \neq 0, t \neq 0, s \neq 0, \\ a_0 \prod_{k=1}^t (x+b_k^2)^{\beta_k} \prod_{p=1}^s (x^2+C_p x+D_p)^{\gamma_p}, & m=0, t \neq 0, s \neq 0, \\ a_0 \prod_{i=1}^m (x-a_i^2)^{\alpha_i} \prod_{p=1}^s (x^2+C_p x+D_p)^{\gamma_p}, & m \neq 0, t=0, s \neq 0, \\ a_0 \prod_{i=1}^m (x-a_i^2)^{\alpha_i} \prod_{k=1}^t (x+b_k^2)^{\beta_k}, & m \neq 0, t \neq 0, s=0, \\ a_0 \prod_{i=1}^m (x-a_i^2)^{\alpha_i}, & m \neq 0, t=0, s=0, \\ a_0 \prod_{k=1}^t (x+b_k^2)^{\beta_k}, & m=0, t \neq 0, s=0, \\ a_0 \prod_{p=1}^s (x^2+C_p x+D_p)^{\gamma_p}, & m=0, t=0, s \neq 0. \end{cases}$$

以下就 $Q_1(x)$ 表达式中的第一种情形予以论证.

由 $C_p^2 - 4D_p < 0$, 可得

$$x^2 + C_p x + D_p = (x^2 + E_p x + F_p)(x^2 - E_p x + F_p) \quad (p=1, 2, \dots, s),$$

则此时有

$$Q_1(x^2) = a_0 \prod_{i=1}^m (x-a_i)^{\alpha_i} (x+a_i)^{\alpha_i} \prod_{k=1}^t (x^2+b_k^2)^{\beta_k} \prod_{p=1}^s (x^2+E_p x+F_p)^{\gamma_p} (x^2-E_p x+F_p)^{\gamma_p},$$

以及

$$H(x^2) = \frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)}$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\alpha_i} \left[\frac{A_k}{(a_i-x)^j} + \frac{A'_k}{(a_i+x)^j} \right] + \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{B_k x + C_k}{(x^2+b_k^2)^l} + \sum_{p=1}^s \sum_{r=1}^{\gamma_p} \left[\frac{M_p x + N_p}{(x^2+E_p x+F_p)^r} + \frac{M'_p x + N'_p}{(x^2-E_p x+F_p)^r} \right].$$

显然有 $H(x^2) = H((-x)^2)$, 由 $H(x^2)$ 的分解式的唯一性, 比较系数, 即得常数关系为:

$$A'_{k1} = A_{k1}, M'_{p2} = -M_{p2}, N'_{p2} = N_{p2}, B_{k3} = 0,$$

$$(t_1=1, 2, \dots, \alpha_i, i=1, 2, \dots, m; t_2=1, 2, \dots, \gamma_p, p=1, 2, \dots, s; t_3=1, 2, \dots, \beta_k, k=1, 2, \dots, t)$$

最后得

$$R(x) = P(x^2) + H(x^2) = P(x^2) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\alpha_i} A_k \left[\frac{1}{(a_i-x)^j} + \frac{1}{(a_i+x)^j} \right] + \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{C_k}{(x^2+b_k^2)^l} + \sum_{p=1}^s \sum_{r=1}^{\gamma_p} \left[\frac{M_p x + N_p}{(x^2+E_p x+F_p)^r} - \frac{M_p x - N_p}{(x^2-E_p x+F_p)^r} \right].$$

如若 $H(x) \neq 0$, 而 $m=0$, 但 $t \neq 0, s \neq 0$ 时, 则在上述表达式中应缺乏第二项的和式, 形如

$$R(x) = P(x^2) + \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{C_k}{(x^2+b_k^2)^l} + \sum_{p=1}^s \sum_{r=1}^{\gamma_p} \frac{M_p x + N_p}{(x^2+E_p x+F_p)^r},$$

其他情形可以类似推演, 此处不再一一细叙. 至于当 $H(x) \equiv 0$ 时, 当然有 $R(x) = P(x^2)$.

另外, 本题也可在复数域上作分解考虑.

仍记 $R^*(x) = P(x) + H(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式, 而 $H(x)$ 要么是零 (当 $R^*(x)$ 为多项式时), 要么是一个

真分式, 例如 $H(x) \neq 0$ 时, 记 $H(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是其真分式. $P_1(x), Q_1(x)$ 为多项式. 若记 $Q_1(x)$ 在复数域中的根为 α_i , 其相应重数记为 $n_i (i=1, 2, \dots, m; \text{显然 } m \geq 1)$, 即

$$Q_1(x) = a_0 \prod_{i=1}^m (x-\alpha_i)^{n_i},$$

那么 $Q_1(x^2)$ 中的每一项 $x^2 - a_i$ 可分解为一次式乘积

$$x^2 - a_i = (x - b_i)(x + b_i),$$

于是,

$$Q_1(x^2) = a_0 \prod_{i=1}^m (x - b_i)^{n_i} (x + b_i)^{n_i}.$$

$$\text{相应地有 } H(x^2) = \frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \left[\frac{B_{ik}}{(x - b_i)^k} + \frac{B'_{ik}}{(x + b_i)^k} \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \left[\frac{A_{ik}}{(x - b_i)^k} + \frac{A'_{ik}}{(x + b_i)^k} \right].$$

由 $H(x^2) = H((-x)^2)$, 从 $H(x^2)$ 的分解式的唯一性, 比较系数, 即得

$$A'_{ik} = A_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, n_i; i=1, 2, \dots, m).$$

最后得到

$$R(x) = P(x^2) + H(x^2) = P(x^2) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \left[\frac{A_{ik}}{(b_i - x)^k} + \frac{A_{ik}}{(b_i + x)^k} \right],$$

其中 b_i 为分母 $Q_1(x^2)$ 的根, A_{ik} 为常系数.

【1925】 计算 $\int \frac{dx}{1+x^{2n}}$, 式中 n 为正整数.

解 先将被积函数分解成部分分式之和, 我们可以证明:

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1}.$$

事实上, 记多项式 $x^{2n} + 1$ 的 $2n$ 个根为 a_k ($k=1, 2, \dots, 2n$), 显然 $a_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + i \sin \frac{2k-1}{2n} \pi$, 其中 $i^2 = -1$.

于是,

$$|a_k| = 1, \quad a_k^{2n} = -1, \quad \bar{a}_k = a_{2n-k+1}, \quad a_k \bar{a}_k = 1, \quad a_k + \bar{a}_k = 2 \cos \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

$$\text{设 } \frac{1}{1+x^{2n}} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k}{x - a_k},$$

即

$$1 = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k(1+x^{2n})}{x - a_k}.$$

令 $x \rightarrow a_i$, 并应用洛必达法则, 即得

$$1 = \lim_{x \rightarrow a_i} \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k(1+x^{2n})}{x - a_k} = \lim_{x \rightarrow a_i} \frac{A_i(1+x^{2n})}{x - a_i} = \lim_{x \rightarrow a_i} (2n A_i x^{2n-1}) = 2n A_i \frac{a_i^{2n}}{a_i} = -\frac{2n A_i}{a_i} \quad (i=1, 2, \dots, 2n),$$

即 $A_k = -\frac{a_k}{2n}$ ($k=1, 2, \dots, 2n$). 于是,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^{2n}} &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{x - a_k} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{x - a_k} + \frac{\bar{a}_k}{x - \bar{a}_k} \right) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{(a_k + \bar{a}_k)x - 2a_k \bar{a}_k}{x^2 - (a_k + \bar{a}_k)x + a_k \bar{a}_k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{最后得到 } \int \frac{dx}{1+x^{2n}} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int \frac{1 - x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1} dx = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \int \frac{2x - 2 \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1} dx \right) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sin^2 \frac{2k-1}{2n} \pi \int \frac{dx}{\left(x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right)^2 + \sin^2 \frac{2k-1}{2n} \pi} \right] \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left[\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \ln \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{2k-1}{2n} \pi \arctan \frac{x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi} \right) + C. \end{aligned}$$

§ 3. 无理函数的积分法

利用化被积函数为有理函数的方法,求下列积分:

【1926】 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

解 设 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $dx=2t dt$. 代入得

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2 \int \frac{t dt}{1+t} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2[t - \ln(1+t)] + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

【1927】 $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$

解 设 $\sqrt[5]{x}=t$, 则 $x=t^5$, $dx=5t^4 dt$. 代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} &= 5 \int \frac{t^4 dt}{t^5(1+2t^{2/5}+t^{1/5})} = 5 \int \frac{dt}{t(1+t)(2t^2-t+1)} = 5 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{4(1+t)} - \frac{6t-1}{4(2t^2-t+1)} \right] dt \\ &= 5 \left\{ \ln t - \frac{1}{4} \ln |1+t| - \frac{3}{8} \int \frac{4t-1}{2t^2-t+1} dt - \frac{1}{16} \int \frac{d\left(t-\frac{1}{4}\right)}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} \right\} \\ &= 5 \left\{ \ln |t| - \frac{1}{4} \ln |1+t| - \frac{3}{8} \ln(2t^2-t+1) - \frac{1}{4\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}} \right\} + C \\ &= \frac{3}{4} \ln \frac{t^5}{(1+t)^2(2t^2-t+1)^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C \\ &= \frac{3}{4} \ln \frac{x\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^2(2\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x}+1)^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

【1928】 $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx.$

解 设 $\sqrt[3]{2+x}=t$, 则 $x=t^3-2$, $dx=3t^2 dt$. 代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx &= 3 \int \frac{t^3-2t^3}{t^3+t-2} dt = 3 \int \left(t^3 - t + \frac{t^2-2t}{t^3+t-2} \right) dt \\ &= \frac{3}{4} t^4 - \frac{3}{2} t^2 + 3 \int \left[-\frac{1}{4(t-1)} + \frac{\frac{5}{4}t - \frac{1}{2}}{t^2+t+2} \right] dt \\ &= \frac{3}{4} t^4 - \frac{3}{2} t^2 - \frac{3}{4} \ln |t-1| + \frac{15}{8} \int \frac{2t+1}{t^2+t+2} dt - \frac{27}{8} \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \\ &= \frac{3}{4} t^4 - \frac{3}{2} t^2 - \frac{3}{4} \ln |t-1| + \frac{15}{8} \ln(t^2+t+2) - \frac{27}{4\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right) + C, \end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{2+x}$.

【1929】 $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx.$

提示 令 $\sqrt[6]{x+1}=t$.

解 设 $\sqrt[6]{x+1}=t$, 则 $x=t^6-1$, $dx=6t^5 dt$. 代入得

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx = 6 \int \frac{t^5(1-t^3)}{1+t^2} dt = 6 \int \left(-t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{t-1}{1+t^2} \right) dt$$

$$= -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3\ln(1+t^2) - 6\arctan t + C,$$

其中 $t = \sqrt[6]{x+1}$.

【1930】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}.$

解 设 $\sqrt[4]{x}=t$, 则 $x=t^4$, $dx=4t^3 dt$. 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3} &= 4 \int \frac{t dt}{(1+t)^3} = 4 \int \left[\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} \right] dt = -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} + C \\ &= \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + C.\end{aligned}$$

【1931】 $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx.$

提示 注意 $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)} = x - \sqrt{x^2-1}.$

解 设 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=t$, 则 $x=\frac{t^2+1}{t^2-1}$, $dx=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt$. 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1} dx = -4 \int \frac{t dt}{(t-1)(t+1)^3} \\ &= \int \left[-\frac{2}{(t+1)^3} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t-1)} \right] dt = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C_1 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C.\end{aligned}$$

如果不限制将被积函数化为有理函数, 本题的解法可简单些. 事实上,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)} dx = \int (x - \sqrt{x^2-1}) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C.\end{aligned}$$

【1932】 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

提示 令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$.

解 设 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$, 则 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt$. 代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = -\frac{3}{2} \int dt = -\frac{3}{2}t + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

【1933】 $\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \quad (a>0).$

提示 令 $\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}=t$, 并分别利用 1921 题的递推公式及 1884 题的结果.

解 设 $\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}=t$, 则 $x=\frac{a}{1+t^4}$, $dx=-\frac{4at^3}{(1+t^4)^2}dt$. 代入得

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}} = -4a \int \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt = -4a \int \left[\frac{t}{(t^2-t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)} \right]^2 dt$$

$$= -\frac{a}{2} \int \left(\frac{1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \right)^2 dt = -\frac{a}{2} \int \frac{dt}{(t^2 - t\sqrt{2} + 1)^2} - \frac{a}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + t\sqrt{2} + 1)^2} + a \int \frac{dt}{t^4 + 1}.$$

现在分别求上述积分,利用 1921 题的递推公式,即得

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2 - t\sqrt{2} + 1)^2} &= \frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} + \int \frac{dt}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} = \frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} + \int \frac{d\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}t - 1) + C_1 \end{aligned}$$

及
$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2 + t\sqrt{2} + 1)^2} &= \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} + \int \frac{dt}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} = \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} + \int \frac{d\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}t + 1) + C_2. \end{aligned}$$

利用 1884 题的结果,即得
$$\int \frac{dt}{t^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2} + C_3.$$

最后得到

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} &= -\frac{a}{2} \left[\frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} + \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} \right] - \frac{a\sqrt{2}}{2} [\arctan(\sqrt{2}t - 1) + \arctan(\sqrt{2}t + 1)] \\ &\quad + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \frac{a}{2\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2} \right) + C_4 \\ &= -\frac{at^3}{1 + t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{a}{2\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2} \right) + C_4 \\ &= -\frac{at^3}{1 + t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \frac{a}{2\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{1 - t^2}{t\sqrt{2}} \right) + C, \end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$ ($0 < x < a$).

【1934】 $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \quad (n \text{ 为正整数}).$

解 当 $a=b$ 时,显然被积函数为 $(x-a)^{-2}$,因此,所求的积分为 $-\frac{1}{x-a} + C$;当 $a \neq b$ 时,设 $\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} = t$,

则
$$x = a + \frac{a-b}{t^n - 1}, \quad dx = -\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n - 1)^2} dt, \quad x - a = \frac{a-b}{t^n - 1}, \quad x - b = \frac{(a-b)t^n}{t^n - 1}.$$

代入得
$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = -\frac{n}{a-b} \int dt = -\frac{n}{a-b} t + C = -\frac{n}{a-b} \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C.$$

【1935】 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}.$

提示 设 $\sqrt{x} = \frac{t^2 - 1}{2t}$, 并限制 $t > 1$.

解 设 $\sqrt{x} = \frac{t^2 - 1}{2t}$ 并限制 $t > 1$, 则 $x = \left(\frac{t^2 - 1}{2t}\right)^2$, $dx = \frac{t^4 - 1}{2t^3} dt$, $\sqrt{x+1} = \frac{t^2 + 1}{2t}$, $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$.

代入得
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{t^4 - 1}{t^3(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) dt = \frac{1}{2} \left(t - \ln t - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right) + C_1 \\ &= \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{x(x+1)} + C. \end{aligned}$$

【1936】 证明:若 $p+q=kn$, 式中 k 为整数, 则积分

$$\int R[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}] dx$$

(式中 R 为有理函数及 p, q, n 为整数) 为初等函数.

证 当 $a=b$ 时, $(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}} = (x-a)^k$, 则积分显然为初等函数.

当 $a \neq b$ 时, 设 $\frac{x-a}{x-b} = y$ ($\neq 1$), 则

$$x = \frac{a-by}{1-y}, \quad dx = \frac{a-b}{(1-y)^2} dy, \quad x-a = \frac{(a-b)y}{1-y}, \quad x-b = \frac{a-b}{1-y}.$$

代入得
$$\int R[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}] dx = (a-b) \int R\left[\frac{a-by}{1-y}, y^{\frac{p}{n}}\left(\frac{a-b}{1-y}\right)^{\frac{q}{n}}\right] \frac{dy}{(1-y)^2}.$$

再设 $\sqrt[n]{y} = t$, 则 $y = t^n$, $dy = nt^{n-1} dt$. 从而, 上述积分化为

$$\int R[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}] dx = n(a-b) \int R\left[\frac{a-bt^n}{1-t^n}, t^p\left(\frac{a-b}{1-t^n}\right)^{\frac{q}{n}}\right] \frac{t^n-1}{(1-t^n)^2} dt,$$

因为被积函数为 t 的有理函数, 所以, 积分是初等函数.

求最简单二次无理式的积分:

【1937】
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx &= \int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} \\ &= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} d\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x+x^2)}{\sqrt{1+x+x^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\ &= \frac{2x+1}{4} \sqrt{1+x+x^2} + \frac{3}{8} \ln\left(x+\frac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2}\right) - \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{2} \ln\left(x+\frac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2}\right) + C \\ &= \frac{2x-3}{4} \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{8} \ln\left(x+\frac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2}\right) + C. \end{aligned}$$

【1938】⁺
$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

解 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 则 $x = \frac{1-t}{t}$, $dt = -\frac{1}{t^2} dt$, $\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{|t|} = \operatorname{sgn} t \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}$.

代入得
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} &= -\operatorname{sgn} t \int \frac{dx}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\operatorname{sgn} t \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2-t+1} \right| + C_1 \\ &= -\operatorname{sgn}(x+1) \ln \left| \frac{1-x+2[\operatorname{sgn}(x+1)]\sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)} \right| + C_1. \end{aligned}$$

当 $x+1 > 0$ 时,
$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C_1$$

当 $x+1 < 0$ 时,
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} &= \ln \left| \frac{1-x-2\sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)} \right| + C_1 \\ &= \ln \left| \frac{-3(x+1)}{2(1-x+2\sqrt{x^2+x+1})} \right| + C_1 = -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

总之,
$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C.$$

【1939】
$$\int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

提示 令 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$.

解 设 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$, 则 $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt$, $1-x = \frac{2t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}$.

代入得 $\int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{t^4} dt = \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{2t} + C = \frac{2-x}{3(1-x)^2} \sqrt{1-x^2} + C$.

【1940】 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx$.

提示 令 $\sqrt{x^2+2x+2} = t-x$.

解 设 $\sqrt{x^2+2x+2} = t-x$, 则 $x = \frac{t^2-2}{2(t+1)}$, $dx = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2} dt$, $\sqrt{x^2+2x+2} = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)}$.

代入得
$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2t+2)^2}{(t^2-2)(t+1)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left[1 + \frac{2}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} \right] dt \\ &= \frac{t}{2} + \ln|t+1| + \frac{1}{2(t+1)} - \sqrt{2} \ln \left| \frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} \right| + C_1 \\ &= \sqrt{x^2+2x+2} + \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) - \sqrt{2} \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

【1941】 $\int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

提示 令 $1+x = \frac{1}{t}$, 并就 $1+x > 0$ 及 $1+x < 0$ 两种情况分别求解.

解 设 $1+x = \frac{1}{t}$, 则 $x = \frac{1-t}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, $\sqrt{1-x-x^2} = \frac{\sqrt{t^2+t-1}}{|t|} = \operatorname{sgnt} \frac{\sqrt{t^2+t-1}}{t}$.

代入得
$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}} - \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} + \operatorname{sgnt} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t-1}} \\ &= \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + [\operatorname{sgn}(1+x)] \ln \left| \frac{3+x+2[\operatorname{sgn}(x+1)]\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)} \right| + C_1. \end{aligned}$$

当 $x+1 > 0$ 时, $\int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + \ln \left| \frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x} \right| + C_1$

当 $x+1 < 0$ 时, $\int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) - \ln \left| \frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)} \right| + C_1$
 $= \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + \ln \left| \frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x} \right| + C.$

总之, $\int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + \ln \left| \frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)} \right| + C.$

注 以后诸题中, 出现二次无理式时也会碰到用 sgnt 的问题, 可参照 1938 题及 1941 题类似地处理. 在解这类习题时, 不妨就开方后取正值求解. 如无特殊情况, 今后不再另加说明.

【1942】 $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$.

解 $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx = \int \frac{(x^2-x-1)+2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx = -\int \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2} d\left(x-\frac{1}{2}\right) + 2 \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$$= \frac{1-2x}{4} \sqrt{1+x-x^2} - \frac{5}{8} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + 2 \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= \frac{1-2x}{4} \sqrt{1+x-x^2} - \frac{11}{8} \arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

利用公式 $\int \frac{P_n(x)}{y} dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$, 式中 $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ 为 n 次多项式, $Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式及 λ 为常数, 求下列积分:

【1943】 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$

解 设 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx = (ax^2+bx+c) \sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}},$

两边对 x 求导数, 得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2ax+b) \sqrt{1+2x-x^2} + \frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

从而有

$$x^3 \equiv (2ax+b)(1+2x-x^2) + (ax^2+bx+c)(1-x) + \lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{cases} x^3 & -3a=1, \\ x^2 & 5a-2b=0, \\ x^1 & 2a+3b-c=0, \\ x^0 & b+c+\lambda=0. \end{cases}$$

由此, $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{6}$, $c = -\frac{19}{6}$, $\lambda = 4$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx &= -\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\ &= -\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

【1944】 $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

解 设 $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx = (ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+fx^4+gx^3+hx^2+lx+m) \sqrt{1+x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$

从而有

$$\begin{aligned} x^{10} &\equiv (9ax^8+8bx^7+7cx^6+6dx^5+5ex^4+4fx^3+3gx^2+2hx+l)(1+x^2) \\ &\quad + x(ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+fx^4+gx^3+hx^2+lx+m) + \lambda. \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 求得

$$a = \frac{1}{10}, b = 0, c = -\frac{9}{80}, d = 0, e = \frac{21}{160}, f = 0, g = -\frac{21}{128}, h = 0, l = \frac{63}{256}, m = 0, \lambda = -\frac{63}{256}.$$

于是, $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left(\frac{63}{256}x - \frac{21}{128}x^3 + \frac{21}{160}x^5 - \frac{9}{80}x^7 + \frac{1}{10}x^9\right) \sqrt{1+x^2} - \frac{63}{256} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$

【1945】 $\int x^4 \sqrt{a^2-x^2} dx.$

解 $\int x^4 \sqrt{a^2-x^2} dx = \int \frac{x^4(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = (Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F) \sqrt{a^2-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$

从而有 $x^4(a^2-x^2) \equiv (5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(a^2-x^2) - x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F) + \lambda.$

比较等式两端 x 同次幂的系数, 求得

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{a^2}{24}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{a^4}{16}, \quad F = 0, \quad \lambda = \frac{a^4}{16}.$$

于是, $\int x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left(\frac{1}{6} x^5 - \frac{a^2}{24} x^3 - \frac{a^4}{16} x \right) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{16} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$

【1946】 $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx.$

解 设 $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx = (ax^2 + bx + c) \sqrt{x^2 + 4x + 3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}},$

从而有 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \equiv (2ax + b)(x^2 + 4x + 3) + (x + 2)(ax^2 + bx + c) + \lambda.$

比较等式两端 x 同次幂的系数, 求得 $a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{14}{3}, \quad c = 37, \quad \lambda = -66.$

于是, $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{14}{3} x + 37 \right) \sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| + C.$

【1947】 $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}}.$

解 设 $x = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 这里碰到二次无理式 $\sqrt{x^2 + 1}$ 需引用 $\operatorname{sgn} t$ 的问题, 不妨设

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} \quad (t > 0).$$

代入得 $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}} = - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = - \int \frac{(t^2 + 1) - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = - \int \sqrt{t^2 + 1} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$
 $= -\frac{t}{2} \sqrt{t^2 + 1} - \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| + \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| + C = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{|x|} + C.$

【1948】⁺ $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}}.$

解 不妨设 $x = \frac{1}{t} > 0$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 由 $|x| > 1$ 知必有 $|t| < 1$, 则有

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{t} \quad (0 < t < 1).$$

代入得 $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}} = - \int \frac{t^3}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int \frac{t(1 - t^2) - t}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int t \sqrt{1 - t^2} dt - \int \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt$
 $= -\frac{1}{2} \int (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} d(1 - t^2) + \frac{1}{2} \int (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 - t^2) = -\frac{1}{3} (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} + (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} + C$
 $= \frac{1 + 2x^2}{3x^3} \sqrt{x^2 - 1} + C.$

【1949】⁺ $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 + 3x + 1}}.$

解 设 $x - 1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 不妨设 $t > 0$, 则有

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} = \frac{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}}{t}.$$

代入得 $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 + 3x + 1}} = - \int \frac{t^2}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} dt = (at + b) \sqrt{5t^2 + 5t + 1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}},$

从而有 $-t^2 \equiv a(1 + 5t + 5t^2) + \left(5t + \frac{5}{2}\right)(at + b) + \lambda.$

比较等式两端 t 的同次幂系数, 求得 $a = -\frac{1}{10}, \quad b = \frac{3}{20}, \quad \lambda = -\frac{11}{40}.$

于是, $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 + 3x + 1}} = \left(-\frac{t}{10} + \frac{3}{20}\right) \sqrt{5t^2 + 5t + 1} - \frac{11}{40} \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}}$

$$= \frac{3-2t}{20} \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} \right| + C_1$$

$$= \frac{3x-5}{20(x-1)^2} \sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1} \right| + C.$$

【1950】 $\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}}.$

解 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 先设 $t > 0$, 则有 $\sqrt{x^2+2x} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$.

代入得 $\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}} = - \int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt = (at^3+bt^2+ct+e) \sqrt{1-t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

从而有 $-t^4 \equiv (3at^2+2bt+c)(1-t^2) - t(at^3+bt^2+ct+e) + \lambda.$

比较等式两端 t 的同次幂系数, 求得 $a = \frac{1}{4}, b = 0, c = \frac{3}{8}, e = 0, \lambda = -\frac{3}{8}.$

于是, $\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}} = \left(\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{8}t \right) \sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$= \frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4} \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{x+1} + C.$$

再设 $t < 0$, 则答案前一项不改变符号, 但后一项要改变符号, 因此, 最后得到

$$\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}} = \frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4} \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{|x+1|} + C,$$

其中 $x > 0$ 或 $x < -2$.

【1951】 在什么条件下, 积分 $\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ 是代数函数?

解 设 $\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = (Ax+B) \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$

从而有 $a_1x^2+b_1x+c_1 \equiv A(ax^2+bx+c) + \left(ax + \frac{b}{2}\right)(Ax+B) + \lambda.$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 当 $a \neq 0$ 时求得

$$A = \frac{a_1}{2a}, \quad B = \frac{4ab_1-3a_1b}{4a^2}, \quad \lambda = \frac{8a^2c_1+3a_1b^2-4a(a_1c+bb_1)}{8a^2}.$$

于是, 当 $a \neq 0$ 且 $8a^2c_1+3a_1b^2=4a(a_1c+bb_1)$ 时, $\lambda=0$, 积分为代数函数; 当 $a=0$ 时积分显然为代数函数.

分解有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为最简分式, 求积分 $\int \frac{P(x)}{Q(x)y} dx$, 式中 $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

【1952】 $\int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}}.$

解 $\int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}} + \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{1+2x-x^2}}.$

设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 不妨设 $t > 0$, 则有 $\sqrt{1+2x-x^2} = \frac{\sqrt{2t^2-1}}{t}.$

代入得 $\int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}} = - \int \frac{t dt}{\sqrt{2t^2-1}} - \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}}$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{2t^2-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sqrt{2}t + \sqrt{2t^2-1}| + C$$

$$= \frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+2x-x^2}}{1-x} \right| + C.$$

【1953】 $\int \frac{x dx}{(x^2-1) \sqrt{x^2-x-1}}.$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{x dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}} = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2.\end{aligned}$$

对于 I_1 , 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 不妨设 $t > 0$, 则有 $\sqrt{x^2-x-1} = \frac{\sqrt{t^2-3t+1}}{t}$.

$$\begin{aligned}\text{代入 } I_1, \text{ 得} \quad I_1 &= \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3t+1}} = -\ln \left| t - \frac{3}{2} + \sqrt{t^2-3t+1} \right| + C_1 \\ &= -\ln \left| \frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1} \right| + C_2;\end{aligned}$$

对于 I_2 , 设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 同上可得 $I_2 = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}} = \arcsin \left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} \right) + C_3$.

$$\text{于是,} \quad \int \frac{x dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} \right) + C.$$

【1954】 $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx.$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{(x+1)^2-(x+1)+1}{(x+1)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} + \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}} = I_1 - I_2 + I_3.\end{aligned}$$

$$\text{对于 } I_1, \text{ 显然有} \quad I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right) + C_1;$$

对于 I_2 , 利用 1938 题的结果, 即得

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C_2;$$

对于 I_3 , 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 不妨设 $t > 0$, 则有 $\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}$.

$$\begin{aligned}\text{代入 } I_3, \text{ 得} \quad I_3 &= - \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(2t-1)dt}{\sqrt{t^2-t+1}} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} \\ &= -\sqrt{t^2-t+1} - \frac{1}{2} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2-t+1} \right| + C_3 \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C_4.\end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx = \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right) - \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C.$$

如用下述解法更简单些:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx &= - \int \sqrt{x^2+x+1} d\left(\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C.\end{aligned}$$

*) 利用 1938 题的结果.

【1955】 $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} dx &= \int \frac{(x^3+1)-1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} dx \\ &= \int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx - \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} \\ &= -\int \frac{1+2x-x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} \\ &= -\int \sqrt{2-(x-1)^2} d(x-1) - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + 3 \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}} - I_1 \\ &= \frac{1-x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} - \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{1+2x-x^2} + 3\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - I_1 \\ &= -\frac{x+1}{2} \sqrt{1+2x-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - I_1. \end{aligned}$$

对于 I_1 , 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 可得

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{x+1}\right) + C_1.$$

于是, 最后得到

$$\int \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} dx = -\frac{1+x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} - 2\arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right) + C.$$

【1956】 $\int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}} &= \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}} \\ &= \int \frac{2dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} - \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}} = 2I_1 - I_2. \end{aligned}$$

对于 I_1 , 设 $x-2 = \frac{1}{t}$, 可得

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} = -\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right) + C_1;$$

对于 I_2 , 设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 可得

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} + C_2.$$

于是, 最后得到

$$\int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}} = -2\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right) - \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} + C,$$

其中 $x < 1$ 或 $x > 3$.

【1957】 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

解 设 $x = \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \cos t dt$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$.

代入得
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{dt}{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2} \tan t)}{(\sqrt{2} \tan t)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C. \end{aligned}$$

【1958】 $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}.$

解 当 $x > 1$ 时, 设 $x = \sec t$, 并限制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \sec t \tan t dt$, $\sqrt{x^2-1} = \tan t$.

代入得
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t dt}{1+\sec^2 t} = \int \frac{\cos t}{\cos^2 t + 1} dt = \int \frac{d(\sin t)}{2 - \sin^2 t}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin t}{\sqrt{2} - \sin t} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x - \sqrt{x^2-1}} \right| + C.$$

当 $x < -1$ 时, 仍设 $x = \sec t$, 但限制 $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$, 经计算可获得同样的结果.

总之, 当 $|x| > 1$ 时,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2} - \sqrt{x^2-1}} \right| + C.$$

【1959】 $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}.$

解 设 $x = \tan t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ 且 $|t| \neq \frac{\pi}{4}$, 则 $dx = \sec^2 t dt$, $\sqrt{1+x^2} = \sec t$.

代入得
$$\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{(1-\tan^4 t)\sec t} = \int \frac{\cos^3 t dt}{1-2\sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t}{1-2\sin^2 t} d(\sin t)$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{1-2\sin^2 t}{1-2\sin^2 t} d(\sin t) + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t} = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t} \right| + C$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}} \right| + C \quad (|x| \neq 1).$$

【1960】 $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx.$

解
$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+2}) + I_1.$$

对于 I_1 , 设 $x = \sqrt{2} \tan t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \sqrt{2} \sec^2 t dt$, $\sqrt{x^2+2} = \sqrt{2} \sec t$.

代入得
$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{\sec t dt}{1+2\tan^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1+\sin^2 t} = \arctan(\sin t) + C_1$$
$$= \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right) + C_1 = -\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right) + C.$$

于是, 最后得到
$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+2}) - \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right) + C.$$

化二次三项式为标准形式, 计算下列积分:

【1961】 $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$

解
$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}}.$$

当 $x + \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时, 设 $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sec t$, 并限制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \sec t \tan t dt, \quad \sqrt{x^2+x-1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \tan t, \quad x^2+x+1 = \frac{1}{4}(5\sec^2 t + 3).$$

代入得
$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = 4 \int \frac{\sec t dt}{5\sec^2 t + 3} = 4 \int \frac{\cos t dt}{5+3\cos^2 t} = 4 \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}\sin t)}{(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{3}\sin t)^2}$$

$$= 4 \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{8}} \ln \left| \frac{\sqrt{8} + \sqrt{3}\sin t}{\sqrt{8} - \sqrt{3}\sin t} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| + C.$$

当 $x + \frac{1}{2} < -\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时, 仍设 $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sec t$ 但限制 $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$. 经计算可获同样的结果.

总之, 当 $\left| x + \frac{1}{2} \right| > \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时,

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| + C.$$

【1962】
$$\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

解
$$\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} = \int \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{[3+(x-1)^2]\sqrt{3-(x-1)^2}} dx.$$

设 $x-1 = \sqrt{3}\sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \sqrt{3}\cos t dt$, $\sqrt{2+2x-x^2} = \sqrt{3}\cos t$.

代入得
$$\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} = \int \frac{1+2\sqrt{3}\sin t+3\sin^2 t}{3(1+\sin^2 t)} dt$$

$$= \int dt + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sin t}{1+\sin^2 t} dt - \frac{2}{3} \int \frac{dt}{1+\sin^2 t} = t - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\cos t)}{2-\cos^2 t} - \frac{2}{3} \int \frac{d(\tan t)}{1+2\tan^2 t}$$

$$= t - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \cos t}{\sqrt{2} - \cos t} \right| - \frac{\sqrt{2}}{3} \arctan(\sqrt{2}\tan t) + C$$

$$= \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2+2x-x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \arctan \frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2+2x-x^2}} + C.$$

【1963】
$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

解
$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\sqrt{x^2+x+1}},$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C = \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C.$$

*) 利用 1781 题的结果.

【1964】⁺ 利用分式线性代换 $x = \frac{a+\beta t}{1+t}$, 计算积分:
$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

解 分式线性代换 $x = \frac{a+\beta t}{1+t}$ 给出

$$x^2 \pm x + 1 = \frac{(\beta^2 \pm \beta + 1)t^2 + [2a\beta \pm (a+\beta) + 2]t + (a^2 \pm a + 1)}{(1+t)^2}.$$

要求 $2\alpha\beta \pm (\alpha+\beta) + 2 = 0$ 即化成标准形式, 当 $\alpha+\beta=0$ 及 $\alpha\beta=-1$ 时即得上式. 例如, 取 $\alpha=-1$, $\beta=1$,

我们有 $x = \frac{t-1}{1+t}$ 或 $t = \frac{1+x}{1-x}$, $dx = \frac{2dt}{(1+t)^2}$, $x^2 - x + 1 = \frac{t^2+3}{(t+1)^2}$, $\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{1+3t^2}}{t+1}$,

其中不妨设 $t+1>0$. 于是,

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = 2 \int \frac{t+1}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} dt = 2 \int \frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} + 2 \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} \\ = 2(I_1 + I_2).$$

对于 I_1 , 设 $u = \sqrt{1+3t^2}$, 则 $du = \frac{3tdt}{\sqrt{1+3t^2}}$, $t^2+3 = \frac{u^2+8}{3}$.

代入 I_1 , 得

$$I_1 = \int \frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} = \int \frac{du}{u^2+8} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u}{2\sqrt{2}}\right) + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}}\right) + C_1.$$

对于 I_2 , 设 $u = \frac{3t}{\sqrt{1+3t^2}}$, 则 $\frac{dt}{\sqrt{1+3t^2}} = \frac{du}{3-u^2}$, $t^2+3 = \frac{27-8u^2}{3(3-u^2)}$,

代入 I_2 , 得

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} = 3 \int \frac{du}{27-8u^2} = \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u} \right| + C_2 \\ = \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2+x+1)} + (x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x+1)} - (x+1)\sqrt{2}} \right| + C_2 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)} - (x+1)\sqrt{2}} \right| + C_2.$$

于是, 最后得到

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)} - (x+1)\sqrt{2}} \right| + C.$$

【1965】⁺ 求 $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$.

解 此题与 1964 题均属于下述类型的积分

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m \sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

(参看微积分学教程(Г. М. 菲赫金哥尔茨)第二卷第一分册 55 页“272. 其他的计算方法”)

设 $x = \frac{\alpha+\beta t}{1+t}$, 适当选择 α 与 β , 使得在两个三项式中同时消去一次项. 为此, 将 $x = \frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ 分别代入 x^2+2 及 $2x^2-2x+5$ 中, 并令一次项的系数等于零, 求得

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2,$$

即设 $x = \frac{2t-1}{1+t}$. 从而有

$$dx = \frac{3}{(t+1)^2} dt, \quad x^2+2 = \frac{3(2t^2+1)}{(t+1)^2}, \quad \sqrt{2x^2-2x+5} = \frac{3\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}.$$

以下不妨设 $t+1>0$. 代入得

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} = \frac{1}{3} \int \frac{t+1}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} dt = \frac{1}{3} \int \frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}.$$

对于右端的第一个积分, 设 $u = \sqrt{t^2+1}$, 代入后计算得

$$\frac{1}{3} \int \frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{2u^2-1} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1} + C_1 = \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} + (x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} - (x-2)} + C_1.$$

对于右端的第二个积分, 设 $u = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, 代入后计算得

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \int \frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} &= \frac{1}{3} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3} \arctan u + C_2 = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}} \right) + C_2 \\ &= -\frac{1}{3} \arctan \left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} \right) + C_3.\end{aligned}$$

于是,最后得到

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)} - \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} \right) + C.\end{aligned}$$

利用欧拉代换

(1) 若 $a > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{ax}+z$; (2) 若 $c > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c}$;

(3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z(x-x_1)$.

求下列积分:

【1966】 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$

提示 令 $\sqrt{x^2+x+1} = z-x$.

解 设 $\sqrt{x^2+x+1} = z-x$, 则 $x = \frac{z^2-1}{1+2z}$, $dx = \frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2} dz$, $\sqrt{x^2+x+1} = \frac{z^2+z+1}{1+2z}$.

代入得
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{z^2+z+1}{z(z+\frac{1}{2})^2} dz = \frac{1}{2} \int \left[\frac{4}{z} - \frac{3}{z+\frac{1}{2}} - \frac{3}{2(z+\frac{1}{2})^2} \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z^4}{z+\frac{1}{2}} \right| + \frac{3}{4(z+\frac{1}{2})} + C_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z^4}{2z+1} \right| + \frac{3}{2(2z+1)} + C,\end{aligned}$$

其中 $z = x + \sqrt{x^2+x+1}$.

【1967】 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$

提示 令 $\sqrt{1-2x-x^2} = xz-1$.

解 设 $\sqrt{1-2x-x^2} = xz-1$, 则

$$z = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}, \quad x = \frac{2(z-1)}{z^2+1}, \quad dx = \frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2} dz, \quad \sqrt{1-2x-x^2}+1 = \frac{2z(z-1)}{z^2+1}.$$

代入得
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} &= \int \frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)} dz = \int \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2+1} \right] dz \\ &= \ln \left| \frac{z-1}{z} \right| - 2 \arctan z + C,\end{aligned}$$

其中 $z = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

【1968】 $\int x \sqrt{x^2-2x+2} dx.$

解 设 $\sqrt{x^2-2x+2} = z-x$, 则 $x = \frac{z^2-2}{2(z-1)}$, $dx = \frac{z^2-2z+2}{2(z-1)^2} dz$, $\sqrt{x^2-2x+2} = \frac{z^2-2z+2}{2(z-1)}$.

代入得
$$\begin{aligned}\int x \sqrt{x^2-2x+2} dx &= \frac{1}{8} \int \frac{(z^2-2)(z^2-2z+2)^2}{(z-1)^4} dz \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{[(z-1)^2+2(z-1)-1][(z-1)^2+1]^2}{(z-1)^4} dz \\ &= \frac{1}{8} \int \left\{ [(z-1)^2-(z-1)^{-1}] + [2(z-1)+2(z-1)^{-3}] + [1-(z-1)^{-2}] + 4(z-1)^{-1} \right\} d(z-1)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} \left[(z-1)^3 + (z-1)^{-3} \right] + \left[(z-1)^2 - (z-1)^{-2} \right] + \left[(z-1) + (z-1)^{-1} \right] \right\} + \frac{1}{2} \ln |z-1| + C,$$

其中 $z = x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

【1969】 $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx.$

提示 令 $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = z(x+1)$.

解 设 $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = z(x+1)$, 则 $x = \frac{2-z^2}{z^2-1}$, $dx = -\frac{2z}{(z^2-1)^2} dz$, $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = \frac{z}{z^2-1}$.

代入得
$$\begin{aligned} \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx &= \int \frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2} dz \\ &= \int \left[-\frac{17}{108(z+1)} + \frac{5}{18(z+1)^2} + \frac{1}{3(z+1)^3} + \frac{3}{4(z-1)} - \frac{16}{27(z-2)} \right] dz \\ &= -\frac{17}{108} \ln |z+1| - \frac{5}{18(z+1)} - \frac{1}{6(z+1)^2} + \frac{3}{4} \ln |z-1| - \frac{16}{27} \ln |z-2| + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x+1}$.

【1970】 $\int \frac{dx}{[1 + \sqrt{x(1+x)}]^2}.$

解 设 $\sqrt{x(1+x)} = z+x$, 则 $x = \frac{z^2}{1-2z}$, $dx = \frac{2z(1-z)}{(1-2z)^2} dz$, $1 + \sqrt{x(1+x)} = \frac{1-z-z^2}{1-2z}$.

代入得
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{[1 + \sqrt{x(1+x)}]^2} &= 2 \int \frac{z(1-z)}{(1-z-z^2)^2} dz = 2 \int \frac{(1-z-z^2) + (2z+1) - 2}{(1-z-z^2)^2} dz \\ &= 2 \int \frac{dz}{1-z-z^2} - 2 \int \frac{d(1-z-z^2)}{(1-z-z^2)^2} - 4 \int \frac{dz}{(1-z-z^2)^2} \\ &= 2 \int \frac{d(z + \frac{1}{2})}{\frac{5}{4} - (z + \frac{1}{2})^2} + \frac{2}{1-z-z^2} - 4 \left\{ \frac{2z+1}{5(1-z-z^2)} + \frac{2}{5} \int \frac{d(z + \frac{1}{2})}{\frac{5}{4} - (z + \frac{1}{2})^2} \right\} \\ &= \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + z + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} - z - \frac{1}{2}} \right| + \frac{2}{1-z-z^2} - \frac{4(2z+1)}{5(1-z-z^2)} + C = \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 2z + 1}{\sqrt{5} - 2z - 1} \right| + \frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \sqrt{x(1+x)} - x$.

*) 利用 1921 题的递推公式.

利用不同方法, 计算下列积分:

【1971】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{(x^2+1) - (x^2-1)} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-1} dx \\ &= \frac{x}{4} (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \right| + C. \end{aligned}$$

【1972】 $\int \frac{x dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}.$

提示 令 $\frac{1+x}{1-x} = z$, 并利用 1884 题的结果.

解 设 $\frac{1+x}{1-x} = z$, 则 $x = \frac{z-1}{z+1}$, $dx = \frac{2}{(z+1)^2} dz$.

代入得
$$\int \frac{x dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{(z^2-1)dz}{\sqrt{z}(3z^2+1)} = \int \frac{(z^2-1)d(\sqrt{z})}{3z^2+1} = \int \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{3(3z^2+1)} \right] d(\sqrt{z})$$

$$= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt[4]{3z^2})}{(\sqrt[4]{3z^2})^4+1} = \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{4}{3\sqrt{3}} \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{z\sqrt{3} + \sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3} - \sqrt[4]{12z^2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{1-z\sqrt{3}} \right) \right] + C$$

$$= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{12}} \left[\ln \frac{z\sqrt{3} + \sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3} - \sqrt[4]{12z^2}+1} - 2\arctan \left(\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt{3}-1} \right) \right] + C,$$

其中 $z = \frac{1+x}{1-x}$.

*) 利用 1884 题的结果.

【1973】
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}.$$

解
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} = \int \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{(\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})(-\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} dx$$

$$= \int \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + C.$$

【1974】
$$\int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x + \sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

解
$$\int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x + \sqrt{1+x+x^2}} dx = \int \frac{(x + \sqrt{1+x+x^2})(1+x - \sqrt{1+x+x^2})}{(1+x)^2 - (1+x+x^2)} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} dx = \int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} dx - \ln|x|.$$

对于积分 $\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} dx$, 设 $x = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, $\sqrt{1+x+x^2} = \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t|}$.

不妨设 $t > 0$, 代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} dx &= - \int \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t^2} dt = \int \sqrt{t^2+t+1} d\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} - \frac{1}{2} \int \frac{2t+1}{t\sqrt{1+t+t^2}} dt = \sqrt{x^2+x+1} - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}} \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \ln\left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{1+t+t^2}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right) + 1}} \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \ln \frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1}\right) + C_1 \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \ln \frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x} + \frac{1}{2} \ln \frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{2} + C_1 \\ &= \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} + \ln x + C. \end{aligned}$$

于是, 当 $x > 0$ 时, 最后得到

$$\int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x + \sqrt{1+x+x^2}} dx = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} + C.$$

当 $x < 0$ 时, 可获得同样的结果.

【1975】 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x(x+1)} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{(x+1) - x} dx = \int [(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}] dx$
 $= \int [x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}] dx = \frac{2}{3} [(x+1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}] - \frac{2}{5} [(x+1)^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}}] + C.$

【1976】 $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

解 $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}}} = \int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}\right)^2}}.$

下面我们先考虑积分 $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx$. 设 $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则有 $dx = \sec^2 t dt$. 代入得

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{\tan^2 t - 1}{\sec^4 t} \sec^2 t dt = \int (\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -\int \cos 2t dt = -\frac{1}{2} \sin 2t + C_1 = -\frac{x}{1+x^2} + C_1,$$

从而, 可得 $\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)$. 于是,

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right) + C.$$

【1977】 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}} dx.$

解 仿照 1976 题, 可得

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}} dx = \int \frac{\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} dx}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2-1)^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + \sqrt{1 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^4+1}}{x^2-1} \right| + C.$$

【1978】 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}.$

提示 令 $\frac{1}{x} = \sqrt{t}$ (这里设 $x > 0$. 若 $x < 0$, 则令 $\frac{1}{x} = -\sqrt{t}$, 最后结果相同).

解 作代换 $\frac{1}{x} = \sqrt{t}$ (这里设 $x > 0$. 若 $x < 0$, 则作变换 $\frac{1}{x} = -\sqrt{t}$, 最后结果相同), 则

$$dx = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} dt, \quad \sqrt{x^4+2x^2-1} = \frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}$$

代入得 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right) + C$
 $= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right) + C \quad (|x| > \sqrt{\sqrt{2}-1}).$

【1979】 $\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

解 $\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4}}} + C.$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2(1 + 2x^2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1})}{2 + x^2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} + C.$$

【1980】 证明: 积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx \quad (R \text{ 为有理函数})$$

的求法, 归结为有理函数的积分法.

证明思路 当 a, c 中至少有一个为零时, 则积分的求法显然可归结为有理函数的积分法.

当 $a \neq 0$ 及 $c \neq 0$ 时, 设 $\sqrt{ax+b} = z$, 则 $\sqrt{cx+d} = \sqrt{c_1 z^2 + d_1}$, 其中 $c_1 = \frac{c}{a}$, $d_1 = d - \frac{bc}{a}$. 从而, 原积分变形为

$$\int R\left(\frac{z^2-b}{a}, z, \sqrt{c_1 z^2 + d_1}\right) \frac{2}{a} z dz = \int R_1(z, \sqrt{c_1 z^2 + d_1}) dz,$$

其中 R_1 为有理函数.

若 $c_1 > 0$, 设 $\sqrt{c_1 z^2 + d_1} = \pm \sqrt{c_1} z + u$; 若 $d_1 > 0$, 设 $\sqrt{c_1 z^2 + d_1} = zu \pm \sqrt{d_1}$, 即可将被积函数有理化, 从而命题获证.

证 当 a, c 中至少有一个为零时, 则积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$$

的求法显然可归结为有理函数的积分法.

当 $a \neq 0, c \neq 0$ 时, 设 $\sqrt{ax+b} = z$, 则

$$x = \frac{z^2-b}{a}, \quad dx = \frac{2}{a} z dz, \quad \sqrt{cx+d} = \sqrt{\frac{c}{a} z^2 + d - \frac{bc}{a}} = \sqrt{c_1 z^2 + d_1},$$

式中 $c_1 = \frac{c}{a}$, $d_1 = d - \frac{bc}{a}$. 代入得

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx = \int R\left(\frac{z^2-b}{a}, z, \sqrt{c_1 z^2 + d_1}\right) \frac{2}{a} z dz = \int R_1(z, \sqrt{c_1 z^2 + d_1}) dz,$$

其中 R_1 为有理函数.

再设 $\sqrt{c_1 z^2 + d_1} = \pm \sqrt{c_1} z + u$ ($c_1 > 0$) 或 $\sqrt{c_1 z^2 + d_1} = zu \pm \sqrt{d_1}$ ($d_1 > 0$)——欧拉代换, 就可将被积函数有理化. 于是, 积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$$

的求法可归结为有理函数的积分法.

二项微分式的积分

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad (\text{式中 } m, n \text{ 和 } p \text{ 为有理数})$$

仅在下列三种情形可化为有理函数的积分(切比雪夫定理):

第一种情形, p 为整数. 此时令 $x = z^N$, 其中 N 为分数 m 和 n 的公分母.

第二种情形, $\frac{m+1}{n}$ 为整数. 此时令 $a + bx^n = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母.

第三种情形, $\frac{m+1}{n} + p$ 为整数. 此时利用代换: $ax^{-n} + b = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母.

若 $n=1$, 则这些情形等价于: (1) p 为整数. (2) m 为整数. (3) $m+p$ 为整数.

计算下列积分:

【1981】 $\int \sqrt{x^3+x^4} dx.$

提示 令 $x^{-1}+1=z^2$.

解 $\sqrt{x^3+x^4}=x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $m=\frac{3}{2}$, $n=1$, $p=\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n}+p=3$, 这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-1}+1=z^2$, 则 $x=\frac{1}{z^2-1}$, $dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz$, $\sqrt{x^3+x^4}=\frac{z}{(z^2-1)^2}$

(不妨设 $z>0$, 以下各题不再说明). 代入得

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^3+x^4} dx &= -2 \int \frac{z^2}{(z^2-1)^4} dz = -2 \int \frac{dz}{(z^2-1)^4} - 2 \int \frac{dz}{(z^2-1)^3} \\ &= -2 \left[-\frac{z}{6(z^2-1)^3} - \frac{5}{6} \int \frac{dz}{(z^2-1)^3} \right]^{*)} - 2 \int \frac{dz}{(z^2-1)^3} = \frac{z}{3(z^2-1)^3} - \frac{1}{3} \int \frac{dz}{(z^2-1)^3} \\ &= \frac{z}{3(z^2-1)^3} + \frac{z}{12(z^2-1)^2} - \frac{z}{8(z^2-1)} + \frac{1}{16} \ln \frac{z+1}{z-1} + C \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(x+x^2)^3} - \frac{1+2x}{8} \sqrt{x+x^2} + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C \quad (x>0). \end{aligned}$$

*) 利用 1921 题的结果.

【1982】 $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx.$

提示 令 $x=z^6$.

解 $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}$, $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$; p 为整数, 这是二项微分式的第一种情形.

设 $x=z^6$, 则 $dx=6z^5dz$, $\sqrt{x}=z^3$, $\sqrt[3]{x}=z^2$. 代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx &= 6 \int \frac{z^8}{(z^2+1)^2} dz = 6 \int \left[z^4 - 2z^2 + 3 - \frac{4}{z^2+1} + \frac{1}{(z^2+1)^2} \right] dz \\ &= \frac{6}{5} z^5 - 4z^3 + 18z - 24 \arctan z + 6 \left[\frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan z \right]^{*)} + C \\ &= \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21 \arctan(x^{\frac{1}{6}}) + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1921 题的结果.

【1983】 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

提示 令 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$.

解 $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$, $m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n}=3$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$, 则 $x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}}$, $dx=3z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}dz$. 代入得

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3 \int (z^2-1)^2 dz = \frac{3}{5} z^5 - 2z^3 + 3z + C,$$

其中 $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

【1984】 $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}=x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $m=5$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n}=3$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $\sqrt{1-x^2}=z$ (不妨设 $x>0$), 则 $x=\sqrt{1-z^2}$, $dx=-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz$. 代入得

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int (1-z^2)^2 dz = -z + \frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + C,$$

其中 $z=\sqrt{1-x^2}$.

【1985】 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

提示 令 $x^{-3}+1=z^3$.

解 $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}=x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}$, $m=0$, $n=3$, $p=-\frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n}+p=0$, 这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-3}+1=z^3$, 则 $x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}}$, $dx=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz$. 代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} &= - \int \frac{z}{z^3-1} dz = -\frac{1}{3} \int \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{3} \int \frac{z-1}{z^2+z+1} dz \\ &= -\frac{1}{3} \ln|z-1| + \frac{1}{6} \ln(z^2+z+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) + C, \end{aligned}$$

其中 $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

【1986】 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

解 $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}$, $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$; $\frac{m+1}{n}+p=0$, 这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-4}+1=z^4$, 则 $z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$ ($z>0, x>0$), $x=(z^4-1)^{-\frac{1}{4}}$, $dx=-z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz$. 代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = - \int \frac{z^2}{z^4-1} dz = \int \left[\frac{1}{4(z+1)} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{2(z^2+1)} \right] dz = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{2} \arctan z + C,$$

其中 $z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

【1987】 $\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{1+x^6}}.$

解 $\frac{1}{x \sqrt[6]{1+x^6}}=x^{-1}(1+x^6)^{-\frac{1}{6}}$, $m=-1$, $n=6$, $p=-\frac{1}{6}$; $\frac{m+1}{n}=0$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^6=z^6$, 则 $z=\sqrt[6]{1+x^6}$ ($z>0, x>0$), $x=\sqrt[6]{z^6-1}$, $dx=z^5(z^6-1)^{-\frac{5}{6}}dz$. 代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt[6]{1+x^6}} &= \int \frac{z^4 dz}{z^6-1} = \int \left[-\frac{1}{6(z+1)} + \frac{z+1}{6(z^2-z+1)} + \frac{1}{6(z-1)} + \frac{-z+1}{6(z^2+z+1)} \right] dz \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{12} \ln \frac{z^2-z+1}{z^2+z+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) \right] + C_1 \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{12} \ln \frac{z^2-z+1}{z^2+z+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}\right) + C, \end{aligned}$$

其中 $z=\sqrt[6]{1+x^6}$.

【1988】 $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

解 $\frac{1}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} = x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}, m=-3, n=-1, p=-\frac{1}{5}; \frac{m+1}{n}=2$, 这是二项微分式的第二种

情形. 设 $1+x^{-1}=z^5$, 则 $x=(z^5-1)^{-1}, dx=-5z^4(z^5-1)^{-2}dz$. 代入得

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} = -5 \int z^3(z^5-1)dz = -\frac{5}{9}z^9 + \frac{5}{4}z^4 + C,$$

其中 $z = \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$.

【1989】 $\int \sqrt[3]{3x-x^3} dx.$

解 $\sqrt[3]{3x-x^3} = x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}, m=\frac{1}{3}, n=2, p=\frac{1}{3}; \frac{m+1}{n}+p=1$, 这是二项微分式的第三种情形.

设 $3x^{-2}-1=z^3$ (不妨设 $x>0$), 则

$$z = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{z^3+1}}, \quad dx = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{z^2}{(z^3+1)^{\frac{3}{2}}} dz.$$

代入得
$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{3x-x^3} dx &= -\frac{9}{2} \int \frac{z^3}{(z^3+1)^2} dz = -\frac{9}{2} \int \frac{dz}{z^3+1} + \frac{9}{2} \int \frac{dz}{(z^3+1)^2} \\ &= -\frac{9}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right) \right]^{**} + \frac{9}{2} \left[\frac{z}{3(z^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right) \right]^{***} + C = \frac{3z}{2(z^3+1)} - \frac{1}{4} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right) + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

*) 利用 1881 题的结果.

**) 利用 1892 题的结果.

【1990】 在什么情形下, 积分 $\int \sqrt{1+x^m} dx$ (m 为有理数) 为初等函数?

解 $\sqrt{1+x^m} = x^0(1+x^m)^{\frac{1}{2}}$. 由于 $p=\frac{1}{2}$, 故由切比雪夫定理知, 仅在下述两种情形, 此函数的积分可化为有理函数的积分.

第一种情形, $\frac{1}{m}$ 为整数, 即 $m = \frac{1}{k_1} = \frac{2}{2k_1}$, 其中 $k_1 = \pm 1, \pm 2, \dots$.

第二种情形, $\frac{1}{m} + \frac{1}{2}$ 为整数, 即 $m = \frac{2}{2k_2-1}$, 其中 $k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

综上所述, 即得: 当 $m = \frac{2}{k}$ (式中 $k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 积分 $\int \sqrt{1+x^m} dx$ 为初等函数.

§ 4. 三角函数的积分法

形如

$$\int \sin^m x \cos^n x dx \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数})$$

的积分, 可利用巧妙的变换或运用递推公式计算.

求下列积分:

【1991】 $\int \cos^3 x dx.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1992】 } \int \sin^6 x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \sin^6 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 dx = \frac{1}{8} \int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx \\ &= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x) \\ &= \frac{5x}{16} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{16} \sin 2x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C \\ &= \frac{5x}{16} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1993】 } \int \cos^6 x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \cos^6 x dx &= \int \sin^6 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) d \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{5}{16} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{4} \sin 2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{3}{64} \sin 4 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{48} \sin^3 2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + C_1 \\ &= \frac{5x}{16} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.\end{aligned}$$

*) 利用 1992 题的结果.

$$\text{【1994】 } \int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1995】 } \int \sin^4 x \cos^5 x dx.$$

$$\text{解 } \int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

$$\text{【1996】 } \int \sin^5 x \cos^3 x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \sin^5 x \cos^3 x dx &= \int \frac{1}{32} \sin^5 2x dx = -\frac{1}{64} \int (1 - \cos^2 2x)^2 d(\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{64} \cos 2x + \frac{1}{96} \cos^3 2x - \frac{1}{320} \cos^5 2x + C.\end{aligned}$$

$$\text{【1997】 } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$\text{解 } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$\text{【1998】 } \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} d(\sin x) = -\frac{1}{2} \int \cos^3 x d \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right) \\ &= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{\cos^2 x \sin x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx\end{aligned}$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{3}{2} \cos x + C$$

【1999】 $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

解 $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\int \frac{1}{\sin x} d(\cot x) = -\frac{\cot x}{\sin x} - \int \cot x \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} dx$
 $= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|,$

于是, $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$

【2000】 $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

解 $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \right| + C$
 $= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C.$

*) 利用 1999 题的结果.

【2001】 $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$

解 $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = 16 \int \frac{dx}{\sin^4 2x} = -8 \int \csc^2 2x d(\cot 2x)$
 $= -8 \int (1 + \cot^2 2x) d(\cot 2x) = -8 \cot 2x - \frac{8}{3} \cot^3 2x + C.$

【2002】 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$

提示: 多次利用等式 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^5 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$
 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^5 x} dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx + 2 \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$
 $= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^5 x} + 2 \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + 3 \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$
 $= \frac{1}{4\cos^4 x} - 2 \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + 3 \int \frac{d(\tan x)}{\tan x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = \frac{1}{4\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + 3 \ln |\tan x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C_1$
 $= \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{3}{2} \tan^2 x - \frac{1}{2} \cot^2 x + 3 \ln |\tan x| + C.$

【2003】 $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$

提示: 与 2002 题相同.

解 $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^4 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$
 $= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{3\cos^3 x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$
 $= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$

【2004】 $\int \tan^5 x dx$

解 $\int \tan^5 x dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1)^2 dx = \int \sec^4 x \tan x dx - 2 \int \sec^2 x \tan x dx + \int \tan x dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int \sec^3 x d(\sec x) - 2 \int \sec x d(\sec x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{4} \sec^4 x - \sec^2 x - \ln |\cos x| + C_1 \\
 &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.
 \end{aligned}$$

【2005】 $\int \cot^6 x dx.$

解 $\int \cot^6 x dx = \int \cot^2 x (\csc^2 x - 1)^2 dx = \int \cot^2 x \csc^4 x dx - 2 \int \cot^2 x \csc^2 x dx + \int \cot^2 x dx$

$$\begin{aligned}
 &= - \int \cot^2 x (1 + \cot^2 x) d(\cot x) + 2 \int \cot^2 x d(\cot x) + \int (\csc^2 x - 1) dx \\
 &= -\frac{1}{3} \cot^3 x - \frac{1}{5} \cot^5 x + \frac{2}{3} \cot^3 x - \cot x - x + C = -\frac{1}{5} \cot^5 x + \frac{1}{3} \cot^3 x - \cot x - x + C.
 \end{aligned}$$

【2006】 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx.$

解 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx = \int \tan^4 x d(\tan x) = \frac{1}{5} \tan^5 x + C.$

【2007】 $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} = \int \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} = \int \sqrt{\tan x} d(\tan x) - \int \frac{d(\cot x)}{\sqrt{\cot x}}$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\tan^3 x} - 2 \sqrt{\cot x} + C.$$

【2008】* $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

解 设 $t = \sqrt[3]{\sin x}$, 不妨只考虑 $\cos x$ 为正的的情况, 即 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 且 $x \neq 0$, 则有

$$dx = \frac{3t^2}{\sqrt{1-t^6}} dt, \quad \cos x = \sqrt{1-t^6}.$$

代入得 $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = 3 \int \frac{dt}{1-t^6} = \frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{1-t^3} + \frac{1}{1+t^3} \right) dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{t+2}{1+t+t^2} \right) dt + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1+t^3}$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \ln |1-t| + \frac{1}{4} \int \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt + \frac{3}{4} \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right] + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(t+1)^2(t^2+t+1)}{(1-t)^2(t^2-t+1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\arctan \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + \arctan \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right] + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1+t)^3(1-t^3)}{(1-t)^3(1+t^3)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \left(\frac{t\sqrt{3}}{1-t^2} \right) + C,
 \end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{\sin x}$.

*) 利用 1881 题的结果.

【2009】 $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}.$

解 设 $t = \sqrt{\tan x}$, 则 $x = \arctan t^2$, $dx = \frac{2t}{1+t^4} dt$. 代入得

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} &= 2 \int \frac{dt}{1+t^4} = 2 \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} \right) + C \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + C.
 \end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt{\tan x}$.

*) 利用 1884 题的结果.

【2010】 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\tan x}}.$

解 设 $\sqrt[3]{\tan x} = t$, 则 $x = \arctan t^3$, $dx = \frac{3t^2}{1+t^6} dt$. 代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\tan x}} &= 3 \int \frac{t dt}{1+t^6} = \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2)}{1+(t^2)^3} = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t^2-1}{\sqrt{3}} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2t^2-1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{\tan x}$.

*) 利用 1881 题的结果.

【2011】 推出下列积分的递推公式.

(1) $I_n = \int \sin^n x dx$; (2) $K_n = \int \cos^n x dx$ ($n > 2$).

利用这些公式计算 $\int \sin^5 x dx$ 和 $\int \cos^8 x dx$.

提示 利用分部积分法, 易得:

(1) $I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$; (2) $K_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-2}$.

解 (1) $I_n = \int \sin^n x dx = -\int \sin^{n-1} x d(\cos x) = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$
 $= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} + (1-n) I_n,$

于是,
$$I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2};$$

利用此公式及 $I_0 = \int dx = x + C$, 即得

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \sin^6 x dx = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} + \frac{5}{6} I_4 = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5 \cos x \sin^3 x}{24} + \frac{5}{8} I_2 \\ &= -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5 \cos x \sin^3 x}{24} - \frac{5 \cos x \sin x}{16} + \frac{5}{16} x + C. \end{aligned}$$

(2) $K_n = \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x d(\sin x)$
 $= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx$
 $= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) K_{n-2} - (n-1) K_n,$

于是,
$$K_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-2};$$

利用此公式及 $K_0 = x + C$, 即得

$$\begin{aligned} K_8 &= \int \cos^8 x dx = \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{8} K_6 = \dots \\ &= \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cos^5 x + \frac{35}{192} \sin x \cos^3 x + \frac{35}{128} \sin x \cos x + \frac{35}{128} x + C. \end{aligned}$$

【2012】 推出下列积分的递推公式:

(1) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$; (2) $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ ($n > 2$).

利用这些公式计算 $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ 和 $\int \frac{dx}{\cos^7 x}$.

提示 利用分部积分法及 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, 易得

$$(1) I_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}; \quad (2) K_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad I_n &= \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x} dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \int \cos x d\left(\frac{1}{\sin^{n-1}x}\right) \\ &= I_{n-2} - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} - \frac{1}{n-1} I_{n-2} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}; \end{aligned}$$

利用此公式及 $I_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$, 即得

$$I_5 = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} + \frac{3}{4} I_3 = \dots = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad K_n &= \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^n x} dx = \frac{1}{n-1} \int \sin x d\left(\frac{1}{\cos^{n-1}x}\right) + K_{n-2} \\ &= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} - \frac{1}{n-1} K_{n-2} + K_{n-2} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}; \end{aligned}$$

利用此公式及 $K_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$, 即得

$$K_7 = \int \frac{dx}{\cos^7 x} = \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5}{6} K_5 = \dots = \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5\sin x}{24\cos^4 x} + \frac{5\sin x}{16\cos^2 x} + \frac{5}{16} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

为了计算下面的积分, 可以运用公式

$$\text{I. } \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\text{II. } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$\text{III. } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

求积分:

$$\text{【2013】} \quad \int \sin 5x \cos x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \sin 5x \cos x dx = \frac{1}{2} \int [\sin 4x + \sin 6x] dx = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x + C.$$

$$\text{【2014】} \quad \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int \cos 2x (\cos 4x + \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \int (\cos 6x + \cos 2x) dx + \frac{1}{4} \int (1 + \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{x}{4} + C. \end{aligned}$$

$$\text{【2015】} \quad \int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{2}{3}x - \cos \frac{4}{3}x \right) \sin \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos \frac{2}{3}x \sin \frac{x}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos \frac{4}{3}x \sin \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\sin \frac{7}{6}x - \sin \frac{1}{6}x \right) dx - \frac{1}{4} \int \left(\sin \frac{11}{6}x - \sin \frac{5}{6}x \right) dx \\ &= -\frac{3}{14} \cos \frac{7}{6}x + \frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11}{6}x - \frac{3}{10} \cos \frac{5}{6}x + C. \end{aligned}$$

$$\text{【2016】} \quad \int \sin x \sin(x+a) \sin(x+b) dx.$$

$$\text{解} \quad \int \sin x \sin(x+a) \sin(x+b) dx = \frac{1}{2} \int \sin x [\cos(a-b) - \cos(2x+a+b)] dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\cos x \cos(a-b) - \frac{1}{4} \int [\sin(3x+a+b) - \sin(x+a+b)] dx \\
&= -\frac{1}{2}\cos x \cos(a-b) + \frac{1}{12}\cos(3x+a+b) - \frac{1}{4}\cos(x+a+b) + C.
\end{aligned}$$

【2017】 $\int \cos^2 ax \cos^2 bx dx.$

解 $\int \cos^2 ax \cos^2 bx dx = \int (\cos ax \cos bx)^2 dx = \frac{1}{4} \int [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]^2 dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int [\cos^2(a-b)x + \cos^2(a+b)x + 2\cos(a-b)x \cos(a+b)x] dx \\
&= \frac{1}{8} \int [2 + \cos 2(a+b)x + \cos 2(a-b)x] dx + \frac{1}{4} \int (\cos 2ax + \cos 2bx) dx \\
&= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)} + \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} + \frac{1}{8a} \sin 2ax + \frac{1}{8b} \sin 2bx + C.
\end{aligned}$$

【2018】 $\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx.$

解 先利用三角公式化简 $\sin^3 2x \cos^2 3x$, 得

$$\sin^3 2x \cos^2 3x = -\frac{1}{16} \sin 12x + \frac{3}{16} \sin 8x - \frac{1}{8} \sin 6x - \frac{3}{16} \sin 4x + \frac{3}{8} \sin 2x.$$

于是, $\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx = \frac{1}{192} \cos 12x - \frac{3}{128} \cos 8x + \frac{1}{48} \cos 6x + \frac{3}{64} \cos 4x - \frac{3}{16} \cos 2x + C.$

为了计算下面的积分, 可以运用恒等式:

$$\sin(a-\beta) \equiv \sin[(x+a)-(x+\beta)], \quad \cos(a-\beta) \equiv \cos[(x+a)-(x+\beta)].$$

求积分:

【2019】 $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} - \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} \right] dx = \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+a)} \right| + C,$$

其中 $\sin(a-b) \neq 0$.

【2020】 $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} = \frac{1}{\cos(a-b)} \int \frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)} dx$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)} \int \left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} + \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)} \right] dx = \frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)} \right| + C.$$

其中 $\cos(a-b) \neq 0$.

【2021】 $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}.$

解 $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\cos(x+a)\cos(x+b)} dx$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)} - \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)} \right] dx = \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)} \right| + C.$$

其中 $\sin(a-b) \neq 0$.

*) 当 $a-b=2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 是更简单的积分, 2019 题及 2020 题与本题类似, 解法从略.

【2022】 $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \frac{1}{\cos a} \int \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2} - \frac{x-a}{2}\right)}{\sin x - \sin a} dx = \frac{1}{\cos a} \int \frac{\cos \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2} + \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}} dx$

$$= \frac{1}{2\cos a} \int \left(\frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} + \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right) dx = \frac{1}{\cos a} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right| + C,$$

其中 $\cos a \neq 0$.

【2023】 $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}.$

解 $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{3}{2}\pi\right)}$

$$= \frac{1}{\cos\left(a + \frac{3}{2}\pi\right)} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a-\pi}{2}}{\cos \frac{x+a+2\pi}{2}} \right|^{**} + C = \frac{1}{\sin a} \ln \left| \frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right| + C,$$

其中 $\sin a \neq 0$.

*) 利用 2022 题的结果.

【2024】 $\int \tan x \tan(x+a) dx.$

解 $\int \tan x \tan(x+a) dx = \int \frac{\sin x \sin(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx$

$$= \int \frac{\cos x \cos(x+a) + \sin x \sin(x+a) - \cos x \cos(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx = \int \frac{\cos a - \cos x \cos(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx$$

$$= -x + \cos a \int \frac{dx}{\cos(x+a) \cos x} = -x + \cot a \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right|^{**} + C,$$

其中 $\sin a \neq 0$.

*) 利用 2021 题的结果.

形如 $\int R(\sin x, \cos x) dx$ (R 为有理函数)

的积分在一般情形下可利用代换 $\tan \frac{x}{2} = t$ 化为有理函数的积分.

(1) 若等式

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x) \quad \text{或} \quad R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用相应的代换 $\cos x = t$ 或 $\sin x = t$.

(2) 若等式 $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ 成立, 则最好利用代换 $\tan x = t$.

求积分:

【2025】 $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$

解 设 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. 代入得

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{3\tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

【2026】 $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}.$

解 设 $t = \tan \frac{x}{2}$, 同 2025 题, 得

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{1+t^2}{t(3+t^2)} dt = \int \left[\frac{1}{3t} + \frac{2t}{3(3+t^2)} \right] dt = \frac{1}{3} \ln |t(3+t^2)| + C_1$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^{2**}}{(1+\cos x)^3} + C.$$

$$\begin{aligned} *) \quad \text{由于 } t(3+t^2) &= \tan \frac{x}{2} \left(2 + \sec^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} \left(1 + 2\cos^2 \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{\left(\frac{1-\cos x}{2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1+\cos x}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} (\cos x + 2) = 2 \left[\frac{(1-\cos x)(\cos x + 2)^2}{(1+\cos x)^3} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\text{因而, } \ln |t(3+t^2)| = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}.$$

$$\text{【2027】} \int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx.$$

解 设 $\tan \frac{x}{2} = t$, 同 2025 题, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx &= 4 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2 (1+t-t^2)} = \frac{4}{5} \int \left[\frac{1}{1+t^2} + \frac{-2+t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{1+t-t^2} \right] dt \\ &= \frac{4}{5} \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{8}{5} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{5} \int \frac{2t dt}{(1+t^2)^2} + \frac{4}{5} \int \frac{d\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5} \arctan t - \frac{8}{5} \left[\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \arctan t \right]^{**} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1+t^2} + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)} \right| + C_1 \\ &= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2t}{1+t^2} + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} + t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - t} \right| + C_1 \\ &= -\frac{1}{5} (\cos x + 2\sin x)^{***} + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\arctan 2}{2} \right) \right|^{***} + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1817 题的结果.

$$**) \quad -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2t}{1+t^2} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2\tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2 \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x}}{2} = -\frac{1}{5} (\cos x + 2\sin x) - \frac{1}{5}.$$

$$\begin{aligned} ***) \quad \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} + t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - t} \right| &= \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\arctan 2}{2}\right) + \tan \frac{x}{2}}{\cot\left(\frac{\arctan 2}{2}\right) - \tan \frac{x}{2}} \right| \\ &= \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\arctan 2}{2}\right) + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan\left(\frac{\arctan 2}{2}\right) \tan \frac{x}{2}} \right| + \ln \frac{1}{\cot\left(\frac{\arctan 2}{2}\right)} \\ &= \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\arctan 2}{2} \right) \right| - \ln \left[\cot \left(\frac{\arctan 2}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{【2028】} \int \frac{dx}{1+\epsilon \cos x}, \quad (1) 0 < \epsilon < 1; \quad (2) \epsilon > 1.$$

$$\text{解 设 } t = \tan \frac{x}{2}, \text{ 同 2025 题, 得 } \int \frac{dx}{1+\epsilon \cos x} = 2 \int \frac{dt}{(1+\epsilon) + (1-\epsilon)t^2} = I.$$

(1) $0 < \epsilon < 1$,

$$I = \frac{2}{1+\epsilon} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan\left(t\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2}\right) + C;$$

(2) $\epsilon > 1$,

$$I = \frac{2}{\epsilon-1} \int \frac{dt}{\left(\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}\right) - t^2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2-1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\epsilon+1} + \sqrt{\epsilon-1}t}{\sqrt{\epsilon+1} - \sqrt{\epsilon-1}t} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2-1}} \ln \left| \frac{\epsilon + \cos x + \sqrt{\epsilon^2-1} \sin x}{1 + \epsilon \cos x} \right| + C.$$

$$\begin{aligned} *) \quad \frac{\sqrt{\epsilon+1} + t\sqrt{\epsilon-1}}{\sqrt{\epsilon+1} - t\sqrt{\epsilon-1}} &= \frac{\epsilon+1 + 2t\sqrt{\epsilon^2-1} + (\epsilon-1)t^2}{(\epsilon+1) - (\epsilon-1)t^2} = \frac{\epsilon(1+t^2) + (1-t^2) + 2\sqrt{\epsilon^2-1}t}{\epsilon(1-t^2) + (1+t^2)} \\ &= \frac{\epsilon(1+t^2) + (1+t^2)\cos x + 2t\sqrt{\epsilon^2-1}}{\epsilon(1+t^2)\cos x + (1+t^2)} \\ &= \frac{\epsilon + \cos x + \sqrt{\epsilon^2-1} \frac{2t}{1+t^2}}{\epsilon \cos x + 1} = \frac{\epsilon + \cos x + \sqrt{\epsilon^2-1} \sin x}{\epsilon \cos x + 1}. \end{aligned}$$

【2029】 $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx.$

解 $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1 + \sin^2 x}\right) dx = x - \int \frac{d(\tan x)}{\sec^2 x + \tan^2 x} = x - \int \frac{d(\tan x)}{1 + 2\tan^2 x}$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C.$$

【2030】 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$

解 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int \frac{d(\tan x)}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a \tan x}{b}\right) + C,$

其中 $ab \neq 0$.

【2031】 $\int \frac{\cos^2 x dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}.$

解 $\int \frac{\cos^2 x dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(a \tan x)}{(a^2 \tan^2 x + b^2)^2} = \frac{\tan x}{2b^2(a^2 \tan^2 x + b^2)} + \frac{1}{2ab^3} \arctan\left(\frac{a \tan x}{b}\right) + C,$

其中 $ab \neq 0$.

*) 利用 1921 题的结果.

【2032】 $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$

解 $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C.$$

【2033】 $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2}.$

解 $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(a \tan x + b)}{(a \tan x + b)^2} = -\frac{1}{a \tan x + b} + C = -\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} + C.$

【2034】 $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x - \cos x) dx}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \sin x \cos x} \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{-(\cos x - \sin x) dx}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{6} \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \sin x \cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \sin x \cos x} \\
&= -\frac{1}{3} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{6} \int \frac{d(1 - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{2} \int \frac{d(\cot x)}{\left(\cot x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= -\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} \right) + C.
\end{aligned}$$

$$\text{【2035】} \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{2dx}{2 - \sin^2 2x} = \int \frac{d(\tan 2x)}{2 \sec^2 2x - \tan^2 2x} = \int \frac{d(\tan 2x)}{2 + \tan^2 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

$$\text{【2036】} \quad \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx = \int \frac{2 \sin^2 2x dx}{\sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + 8} = \int \frac{\tan^2 2x d(\tan 2x)}{\tan^4 2x - 8 \tan^2 2x \sec^2 2x + 8 \sec^4 2x} \\
&= \int \frac{\tan^2 2x d(\tan 2x)}{\tan^4 2x + 8 \tan^2 2x + 8} = \frac{\sqrt{2}}{4} (2 + \sqrt{2}) \int \frac{d(\tan 2x)}{\tan^2 2x + 4 + 2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{2}) \int \frac{d(\tan 2x)}{\tan^2 2x + 4 - 2\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{4} \left[\sqrt{2 + \sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \right) - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \right) \right] + C.
\end{aligned}$$

$$\text{【2037】} \quad \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = - \int \frac{\cos 2x}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} dx = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{2 \cos 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} + \frac{2 \cos 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sin 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x} + C.
\end{aligned}$$

$$\text{【2038】} \quad \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \int \frac{\tan x \sec^2 x}{\sec^4 x + \tan^4 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(\tan^2 x)}{2 \tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1} = \frac{1}{2} \arctan(1 + 2 \tan^2 x) + C.$$

$$\text{【2039】} \quad \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \int \frac{dx}{1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x} = \int \frac{2 d(\tan 2x)}{4 \sec^2 2x - 3 \tan^2 2x} = \arctan \left(\frac{\tan 2x}{2} \right) + C.$$

$$\text{【2040】} \quad \int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2} = \int \frac{\frac{1}{\cos^4 x} dx}{(\tan^2 x + 2)^2} = \int \frac{\sec^2 x d(\tan x)}{(\tan^2 x + 2)^2} \\
&= \int \frac{\tan^2 x}{(\tan^2 x + 2)^2} d(\tan x) + \int \frac{d(\tan x)}{(\tan^2 x + 2)^2} = \int \frac{(\tan^2 x + 2) - 2}{(\tan^2 x + 2)^2} d(\tan x) + \int \frac{d(\tan x)}{(\tan^2 x + 2)^2} \\
&= \int \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2} - \int \frac{d(\tan x)}{(\tan^2 x + 2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\tan x}{4(\tan^2 x + 2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C \\
&= \frac{3}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\tan x}{4(\tan^2 x + 2)} + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1817 题的结果.

【2041】 把分母化为对数的形式, 求积分 $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$.

解 $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \varphi)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x + \varphi}{2} \right) \right| + C,$

式中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a^2 + b^2 \neq 0.$

【2042】 证明: $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C$, 式中 A, B, C 为常数.

提示 首先, a 及 b 不可能同时为零. 其次, 令

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x \equiv A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x),$$

比较等式两端同类项的系数, 可得 A, B :

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2} \quad (a^2 + b^2 \neq 0),$$

并注意 $(a \cos x - b \sin x) dx = d(a \sin x + b \cos x)$, 命题即易获证.

证 设 $a_1 \sin x + b_1 \cos x \equiv A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x),$

比较等式两端同类项的系数, 可得 $A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2}, a^2 + b^2 \neq 0.$ 于是,

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \int dx + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C.$$

求积分:

【2043】 $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$

解 此为 2042 题的特例, 这里 $a_1 = 1, b_1 = -1, a = 1, b = 2;$

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 - 2}{1 + 4} = -\frac{1}{5}, B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2} = \frac{-1 - 2}{1 + 4} = -\frac{3}{5}.$$

代入得 $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx = -\frac{x}{5} - \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x| + C.$

【2044】 $\int \frac{dx}{3 + 5 \tan x}.$

解 $\int \frac{dx}{3 + 5 \tan x} = \int \frac{\cos x}{5 \sin x + 3 \cos x} dx.$ 此为 2042 题的特例, 这里

$$a_1 = 0, b_1 = 1, a = 5, b = 3; A = \frac{3}{34}, B = \frac{5}{34}.$$

代入得 $\int \frac{dx}{3 + 5 \tan x} = \frac{3}{34} x + \frac{5}{34} \ln |5 \sin x + 3 \cos x| + C.$

【2045】 $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx.$

提示 仿 2042 题, 并利用 2041 题的结果.

解 仿 2042 题, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx &= A \int \frac{a \sin x + b \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx + B \int \frac{a \cos x - b \sin x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx \\ &= A \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{(a \sin x + b \cos x)^2} = \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| - \frac{B}{a \sin x + b \cos x} + C \\ &= \frac{aa_1 + bb_1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| - \frac{ab_1 - a_1 b}{(a^2 + b^2)(a \sin x + b \cos x)} + C, \end{aligned}$$

式中 $A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a^2 + b^2 \neq 0$

(显然按题意 a, b 不同时为零).

*) 利用 2041 题的结果.

【2046】 证明:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

式中 A, B, C 为常数.

提示 首先, a 及 b 不可能同时为零. 其次, 令

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 \equiv A(a \sin x + b \cos x + c) + B(a \cos x - b \sin x) + C,$$

比较等式两端同类项的系数, 可得 A, B, C :

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2}, C = \frac{a(ac_1 - a_1 c) + b(bc_1 - b_1 c)}{a^2 + b^2} \quad (a^2 + b^2 \neq 0),$$

并注意 $(a \cos x - b \sin x) dx = d(a \sin x + b \cos x + c)$, 命题即易获证.

证 按题意 a, b 不同时为零. 设

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 \equiv A(a \sin x + b \cos x + c) + B(a \cos x - b \sin x) + C,$$

比较等式两端同类项的系数, 则有

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2}, C = \frac{a(ac_1 - a_1 c) + b(bc_1 - b_1 c)}{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{代入得} \quad \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx &= A \int dx + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x + c)}{a \sin x + b \cos x + c} + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} \\ &= Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}. \end{aligned}$$

求积分:

$$\text{【2047】} \int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx.$$

解 此为 2046 题的特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = -3, a = 1, b = -2, c = 3,$$

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}, B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2} = \frac{2 + 2}{1 + 4} = \frac{4}{5},$$

$$C = \frac{a(ac_1 - a_1 c) + b(bc_1 - b_1 c)}{a^2 + b^2} = \frac{(-3 - 3) + (-2)(6 - 6)}{1 + 4} = -\frac{6}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{代入得} \quad \int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx &= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5} \ln |\sin x - 2 \cos x + 3| - \frac{6}{5} \int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x + 3} \\ &= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5} \ln |\sin x - 2 \cos x + 3| - \frac{6}{5} \arctan \frac{1 + 5 \tan \frac{x}{2}}{2} + C. \end{aligned}$$

*) 设 $t = \tan \frac{x}{2}$, 积分即得所求式子.

$$\text{【2048】} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}.$$

解 此为 2046 题的特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, a = 1, b = 1, c = \sqrt{2}; A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{代入得} \quad \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{2} + \sin x + \cos x| - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{2} + \sin x + \cos x| - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2} + \sin x + \cos x| - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2\cos^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8})}$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2} + \sin x + \cos x| - \frac{1}{2}\tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) + C.$$

【2049】 $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx.$

解 本题也是 2046 题的特例, 这里

$$a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 0, a = 3, b = 4, c = -2; A = \frac{2}{5}, B = -\frac{1}{5}, C = \frac{4}{5}.$$

代入得 $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\ln|3\sin x + 4\cos x - 2| + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x - 2}$

$$= \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\ln|3\sin x + 4\cos x - 2| + \frac{4}{5\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}(2\tan \frac{x}{2} - 1)}{\sqrt{7} - \sqrt{3}(2\tan \frac{x}{2} - 1)} \right| + C.$$

*) 设 $t = \tan \frac{x}{2}$, 积分即得所求式子.

【2050】 证明:

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

式中 A, B, C 为常数.

提示 首先, a 及 b 不可能同时为零. 其次, 令

$$a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x \equiv A \cos x (a \sin x + b \cos x) - B \sin x (a \sin x + b \cos x) + C,$$

比较等式两端同类项的系数, 可得 A, B, C :

$$A = \frac{bc_1 - a_1 b + 2ab_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2 + b^2}, C = \frac{a_1 b^2 + a^2 c_1 - 2abb_1}{a^2 + b^2} \quad (a^2 + b^2 \neq 0),$$

命题即易获证.

证 按题意 a, b 不同时为零. 设

$$a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x \equiv A \cos x (a \sin x + b \cos x) - B \sin x (a \sin x + b \cos x) + C,$$

比较等式两端同类项的系数, 则有

$$aA - bB = 2b_1, \quad C - aB = a_1, \quad C + bA = c_1,$$

从而,

$$A = \frac{bc_1 - a_1 b + 2ab_1}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2 + b^2}, \quad C = \frac{a_1 b^2 + a^2 c_1 - 2abb_1}{a^2 + b^2}.$$

代入得

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \int \cos x dx - B \int \sin x dx + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}.$$

求积分:

【2051】 $\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx.$

解 此为 2050 题的特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = -2, c_1 = 3, a = 1, b = 1;$$

$$A = \frac{bc_1 - a_1 b + 2ab_1}{a^2 + b^2} = \frac{3 - 1 - 4}{1 + 1} = -1, B = \frac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{3 - 1 + 4}{1 + 1} = 3, C = \frac{a_1 b^2 + a^2 c_1 - 2abb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 + 3 + 4}{1 + 1} = 4.$$

代入得 $\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx = -\sin x + 3\cos x + 4 \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

$$= -\sin x + 3\cos x + \frac{4}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = -\sin x + 3\cos x + 2\sqrt{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C.$$

【2052】 $\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx.$

解 本题也是 2050 题的特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, c_1 = 2, a = 1, b = 2; A = \frac{1}{5}, B = \frac{3}{5}, C = \frac{8}{5}.$$

代入得 $\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx$

$$= \frac{1}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x + \frac{8}{5} \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} = \frac{1}{5} (\sin x + 3\cos x) + \frac{8}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 2\tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{5} - 2\tan \frac{x}{2} + 1} \right| + C.$$

*) 设 $t = \tan \frac{x}{2}$, 积分即得所求式子.

【2053】 证明: 若 $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, 则

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

式中 A, B 为待定系数, λ_1, λ_2 为方程 $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$

的根, 而

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x, \quad k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} \quad (i=1, 2).$$

证 记

$$\begin{aligned} a^2 \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x &= (a - \lambda_i) \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + (c - \lambda_i) \cos^2 x + \lambda_i \\ &= \frac{1}{a - \lambda_i} [(a - \lambda_i)^2 \sin^2 x + 2b(a - \lambda_i) \sin x \cos x + (c - \lambda_i)(a - \lambda_i) \cos^2 x] + \lambda_i, \end{aligned}$$

其中 $\lambda_i (i=1, 2)$ 为方程 $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$ 的根.

由假定 $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, 从而, $(a-c)^2 + 4b^2 \neq 0$, 因此 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 再设 $k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} (i=1, 2)$ 及 $u_i = (a - \lambda_i)$

$\cdot \sin x + b \cos x$. 由于 $(a - \lambda_i)(c - \lambda_i) - b^2 = 0$, 即 $b^2 = (a - \lambda_i)(c - \lambda_i)$. 于是,

$$\begin{aligned} a^2 \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x &= k_i [(a - \lambda_i)^2 \sin^2 x + 2b(a - \lambda_i) \sin x \cos x + b^2 \cos^2 x] + \lambda_i \\ &= k_i [(a - \lambda_i) \sin x + b \cos x]^2 + \lambda_i = k_i u_i^2 + \lambda_i. \end{aligned} \quad (1)$$

其次, 设

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A[(a - \lambda_1) \cos x - b \sin x] + B[(a - \lambda_2) \cos x - b \sin x], \quad (2)$$

比较等式两端同类项的系数, 则有

$$-b(A+B) = a_1, \quad A(a - \lambda_1) + B(a - \lambda_2) = b_1,$$

$$A = -\frac{a_1(\lambda_1 - \lambda_2) + bb_1 + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad B = \frac{bb_1 + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

由(1)式及(2)式即得

$$\begin{aligned} &\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a^2 \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx \\ &= A \int \frac{(a - \lambda_1) \cos x - b \sin x}{k_1 [(a - \lambda_1) \sin x + b \cos x]^2 + \lambda_1} dx + B \int \frac{(a - \lambda_2) \cos x - b \sin x}{k_2 [(a - \lambda_2) \sin x + b \cos x]^2 + \lambda_2} dx \\ &= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

*) 按题意, $b \neq 0$. 因若 $b=0$, 则 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = c$, 从而, k_i 无意义. 不过, 当 $b=0$ 时, 仍能化为所要求的类似形式. 事实上, 当 $b=0$ 时, $a \neq c$, 我们有

$$\begin{aligned} & \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} dx \\ &= a_1 \int \frac{\sin x}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} dx + b_1 \int \frac{\cos x}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} dx = -a_1 \int \frac{d(\cos x)}{(c-a) \cos^2 x + a} + b_1 \int \frac{d(\sin x)}{(a-c) \sin^2 x + c} \\ &= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}, \end{aligned}$$

式中 $A = -a_1$, $B = b_1$, $k_1 = c - a$, $k_2 = a - c$, $u_1 = \cos x$, $u_2 = \sin x$, $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = c$.

本题也可用下法另证: 命 $u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x$, $k_i = \frac{1}{a - \lambda_i}$ ($i = 1, 2$), 代入积分等式, 然后两边求导,

整理并比较系数, 便可知 λ_i 必为方程 $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$ 的根, 相应可求出系数 A, B .

求积分:

【2054】 $\int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$

解 $\int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx = \int \frac{2 \sin x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx$
 $= -2 \int \frac{d(\cos x)}{3 + \cos^2 x} - \int \frac{d(\sin x)}{4 - \sin^2 x} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} + C.$

【2055】 $\int \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} dx.$

解 此为 2053 题的特例, 这里 $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a = 2$, $b = -2$, $c = 5$. 由 $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$,

求得 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, 从而,

$$A = -\frac{a_1(\lambda_1 - \lambda_2) + b_1 b + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} = -\frac{(1-6) - 2 + (2-1)}{-2(1-6)} = \frac{3}{5},$$

$$B = \frac{bb_1 + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{-2 + 1}{10} = -\frac{1}{10};$$

$$u_1 = (a - \lambda_1) \sin x + b \cos x = \sin x - 2 \cos x, u_2 = (a - \lambda_2) \sin x + b \cos x = -4 \sin x - 2 \cos x;$$

$$k_1 = \frac{1}{a - \lambda_1} = 1, \quad k_2 = \frac{1}{a - \lambda_2} = -\frac{1}{4}.$$

代入得 $\int \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} dx = \frac{3}{5} \int \frac{d(\sin x - 2 \cos x)}{(\sin x - 2 \cos x)^2 + 1} + \frac{1}{10} \int \frac{d(4 \sin x + 2 \cos x)}{6 - \frac{1}{4}(4 \sin x + 2 \cos x)^2}$
 $= \frac{3}{5} \arctan(\sin x - 2 \cos x) + \frac{1}{10\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} + 2 \sin x + \cos x}{\sqrt{6} - 2 \sin x - \cos x} \right| + C.$

【2056】 $\int \frac{\sin x - 2 \cos x}{1 + 4 \sin x \cos x} dx.$

解 本题也是 2053 题的特例, 且

$$\int \frac{\sin x - 2 \cos x}{1 + 4 \sin x \cos x} dx = \int \frac{\sin x - 2 \cos x}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x} dx,$$

这里, $a_1 = 1$, $b_1 = -2$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$; $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$; $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{2}$; $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{3}{4}$;

$$u_1 = 2(\cos x - \sin x), \quad u_2 = 2(\cos x + \sin x).$$

代入得 $\int \frac{\sin x - 2 \cos x}{1 + 4 \sin x \cos x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{2d(\cos x - \sin x)}{-2(\cos x - \sin x)^2 + 3} - \frac{3}{4} \int \frac{2d(\cos x + \sin x)}{2(\cos x + \sin x)^2 - 1}$
 $= \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 1} \right| - \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}(\sin x - \cos x)} \right| + C.$

【2057】 证明: $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}},$

式中 A, B, C 为待定系数.

$$\text{证 } a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha), \quad \text{式中 } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是, } \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} &= (a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{dx}{\sin^n(x + \alpha)} = -(a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{1}{\sin^{n-2}(x + \alpha)} d[\cot(x + \alpha)] \\ &= -(a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{\cot(x + \alpha)}{\sin^{n-2}(x + \alpha)} - \frac{n-2}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{\cot(x + \alpha) \cos(x + \alpha)}{\sin^{n-1}(x + \alpha)} dx \\ &= \frac{\frac{b}{a^2 + b^2} \sin x - \frac{a}{a^2 + b^2} \cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} - \frac{n-2}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{1 - \sin^2(x + \alpha)}{\sin^n(x + \alpha)} dx. \end{aligned}$$

设 $I_n = \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n}$, 则由上式可得

$$I_n = \frac{\frac{b}{a^2 + b^2} \sin x - \frac{a}{a^2 + b^2} \cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + (2-n)I_n + \frac{n-2}{a^2 + b^2} I_{n-2}.$$

$$\text{于是, } I_n = \frac{\frac{b}{(n-1)(a^2 + b^2)} \sin x - \frac{a}{(n-1)(a^2 + b^2)} \cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(a^2 + b^2)} I_{n-2}.$$

$$\text{即 } \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

$$\text{式中 } A = \frac{b}{(n-1)(a^2 + b^2)}, \quad B = -\frac{a}{(n-1)(a^2 + b^2)}, \quad C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2 + b^2)}.$$

【2058】 求 $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$.

解 此为 2057 题的特例, 这里 $a=1, b=2, n=3; A=\frac{2}{10}, B=-\frac{1}{10}, C=\frac{1}{10}$.

$$\begin{aligned} \text{代入得 } \int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3} &= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} + \frac{1}{10} \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} \\ &= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} + \frac{1}{10\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sin(x + \alpha)} \\ &= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} + \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \alpha = \arctan 2$.

【2059】 若 n 为大于 1 的正整数, 证明:

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + B \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} \quad (|a| \neq |b|),$$

并求出系数 A, B 和 C .

证 设 $I_n = \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n}$, 先考虑 I_{n-1} .

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \frac{1}{a} \int \frac{(a + b\cos x) - b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}} dx = \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b}{a} \int \frac{d(\sin x)}{(a + b\cos x)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a + b\cos x)^{n-1}} + \frac{(n-1)b^2}{a} \int \frac{\sin^2 x}{(a + b\cos x)^n} dx \\ &= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a + b\cos x)^{n-1}} + \frac{n-1}{a} \int \frac{(b^2 - a^2) + (a + b\cos x)(a - b\cos x)}{(a + b\cos x)^n} dx \\ &= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a + b\cos x)^{n-1}} + \frac{(n-1)(b^2 - a^2)}{a} I_n + \frac{n-1}{a} \int \frac{a - b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}} dx \\ &= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a + b\cos x)^{n-1}} + \frac{(n-1)(b^2 - a^2)}{a} I_n - \frac{n-1}{a} \int \frac{(a + b\cos x) - 2a}{(a + b\cos x)^{n-1}} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b \sin x}{a(a+b \cos x)^{n-1}} + \frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a} I_n - \frac{n-1}{a} I_{n-2} + 2(n-1) I_{n-1}.$$

于是,
$$\frac{(n-1)(a^2-b^2)}{a} I_n = -\frac{b \sin x}{a(a+b \cos x)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1} - \frac{n-2}{a} I_{n-2}.$$

最后得到
$$I_n = -\frac{b \sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b \cos x)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)} I_{n-1} - \frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)} I_{n-2},$$

即
$$\int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n} = \frac{A \sin x}{(a+b \cos x)^{n-1}} + B \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{n-2}}.$$

式中 $A = -\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}, B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}, C = -\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}$ ($|a| \neq |b|; n > 1$ 且 $a \neq 0$).

若 $a=0$, 则 $b \neq 0$, 我们有

$$\int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n} = \frac{1}{b^n} \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{b^n} \left[\frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \right]^{**}.$$

*) 利用 2012 题(2)的结果.

求积分:

【2060】
$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

解
$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1+\sin^2 x}} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x \sqrt{2-\cos^2 x}} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x \sqrt{2\sec^2 x-1}} = \int \frac{d(\sec x)}{\sqrt{2\sec^2 x-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sqrt{2} \sec x + \sqrt{2\sec^2 x-1} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|} + C.$$

【2061】
$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} dx.$$

解
$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} dx = \int \frac{\sin^2 x d(\tan x)}{\sqrt{\tan x}} = 2 \int \sin^2 x d(\sqrt{\tan x}) = 2 \int (1-\cos^2 x) d(\sqrt{\tan x})$$

$$= 2\sqrt{\tan x} - 2 \int \frac{d(\sqrt{\tan x})}{1+\tan^2 x} = 2\sqrt{\tan x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\tan x + \sqrt{2\tan x} + 1}{\tan x - \sqrt{2\tan x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2\tan x}}{\tan x - 1}^{**} + C \quad (\tan x > 0).$$

*) 利用 1884 题的结果.

【2062】
$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}.$$

解 由于 $2+\sin 2x = 1+(\sin x+\cos x)^2 = 3-(\sin x-\cos x)^2$,

于是,

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}} = \int \frac{\cos x - (\cos x - \sin x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}} dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}} dx - \ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$$

$$= -\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}} + \int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}} - \ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}).$$

因而,

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}} - \frac{1}{2} \ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}) + C.$$

【2063】
$$\int \frac{dx}{(1+\epsilon \cos x)^2} \quad (0 < \epsilon < 1).$$

解 此为 2059 题之特例, 这里

$$a=1, \quad b=\varepsilon, \quad n=2, \quad A=-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}, \quad B=\frac{1}{1-\varepsilon^2}, \quad C=0.$$

代入得
$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon \cos x)^2} = -\frac{\varepsilon \sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon \cos x)} + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \int \frac{1}{1+\varepsilon \cos x} dx$$

$$= -\frac{\varepsilon \sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon \cos x)} + \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) + C.$$

*) 利用 2028 题(1)的结果.

【2064】
$$\int \frac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}} dx.$$

提示 令 $\frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} = t$, 则有 $\frac{dx}{\sin^2 \frac{x-a}{2}} = -\frac{2}{\cos a} dt$ ($\cos a \neq 0$).

解 设 $t = \frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}}$, 则 $dt = \frac{-\frac{1}{2} \cos a}{\sin^2 \frac{x-a}{2}} dx$, $\frac{dx}{\sin^2 \frac{x-a}{2}} = -\frac{2}{\cos a} dt$.

于是,
$$\int \frac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}} dx = -\frac{2}{\cos a} \int t^{n-1} dt = -\frac{2}{n \cos a} t^n + C = -\frac{2}{n \cos a} \left(\frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} \right)^n + C \quad (\cos a \neq 0).$$

【2065】 推出积分 $I_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n dx$ (n 为正整数) 的递推公式.

解 解法 1:

设 $t = \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}}$, 则 $x = 2 \arctan \left(\frac{1+t}{1-t} \tan \frac{a}{2} \right)$, $dx = \frac{4 \tan \frac{a}{2}}{t^2 \sec^2 \frac{a}{2} + 2t \left(\tan^2 \frac{a}{2} - 1 \right) + \sec^2 \frac{a}{2}} dt$.

由于

$$\begin{aligned} & \frac{4t^n \tan \frac{a}{2}}{t^2 \sec^2 \frac{a}{2} + 2t \left(\tan^2 \frac{a}{2} - 1 \right) + \sec^2 \frac{a}{2}} \\ &= \frac{4 \tan \frac{a}{2}}{\sec^2 \frac{a}{2}} t^{n-2} + \frac{-4 \tan \frac{a}{2}}{t^2 \sec^2 \frac{a}{2} + 2t \left(\tan^2 \frac{a}{2} - 1 \right) + \sec^2 \frac{a}{2}} \cdot \frac{2 \left(\tan^2 \frac{a}{2} - 1 \right)}{\sec^2 \frac{a}{2}} t^{n-1} \\ & \quad + \frac{-4 \tan \frac{a}{2}}{t^2 \sec^2 \frac{a}{2} + 2t \left(\tan^2 \frac{a}{2} - 1 \right) + \sec^2 \frac{a}{2}} t^{n-2} \quad (n > 2), \end{aligned}$$

两端对 t 积分, 即得递推公式
$$I_n = \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1} + 2 \cos a I_{n-1} - I_{n-2}.$$

解法 2:

设 $y = \frac{x+a}{2}$, 则 $\frac{x-a}{2} = y-a$, 从而,

$$\begin{aligned} I_n &= 2 \int \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^n dy = 2 \int \frac{\sin(y-a)}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^{n-1} dy = 2 \int \frac{\sin y \cos a - \cos y \sin a}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^{n-1} dy \\ &= \cos a I_{n-1} - 2 \sin a \int \frac{\cos y}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^{n-1} dy. \end{aligned}$$

再设

$$\frac{\sin(y-a)}{\sin y} = t = \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}}, \quad J_n = 2 \int \frac{\cos y}{\sin y} t^n dy,$$

则

$$I_n = \cos a I_{n-1} - \sin a J_{n-1}, \quad J_{n-1} = \frac{\cos a I_{n-1} - I_n}{\sin a}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{又 } J_n &= 2 \int \frac{\cos y}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^n dy = -\frac{2}{n} \int \sin^n(y-a) d\left(\frac{1}{\sin^n y}\right) \\ &= -\frac{2}{n} \left[\frac{\sin^n(y-a)}{\sin y} \right] + 2 \int \frac{\sin^{n-1}(y-a)}{\sin^n y} \cos(y-a) dy = -\frac{2}{n} t^n + 2 \int t^{n-1} \frac{\cos y \cos a + \sin y \sin a}{\sin y} dy \\ &= -\frac{2}{n} t^n + \cos a J_{n-1} + \sin a I_{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)式和(2)式解得

$$\begin{aligned} I_n &= \cos a I_{n-1} - \sin a J_{n-1} = \cos a I_{n-1} - \sin a \left(-\frac{2}{n-1} t^{n-1} + \cos a J_{n-2} + \sin a I_{n-2} \right) \\ &= \cos a I_{n-1} + \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1} - \sin a \cos a \left(\frac{\cos a I_{n-2} - I_{n-1}}{\sin a} \right) - \sin^2 a I_{n-2} = 2 \cos a I_{n-1} - I_{n-2} + \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1}. \end{aligned}$$

§ 5. 各种超越函数的积分法

【2066】 证明:若 $P(x)$ 为 n 次多项式,则

$$\int P(x) e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \dots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] + C.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \int P(x) e^{ax} dx &= \frac{1}{a} \int P(x) d(e^{ax}) = \frac{1}{a} P(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} P'(x) dx \\ &= \frac{1}{a} P(x) e^{ax} - \frac{1}{a^2} \int P'(x) d(e^{ax}) = \frac{1}{a} P(x) e^{ax} - \frac{1}{a^2} P'(x) e^{ax} + \frac{1}{a^2} \int e^{ax} P''(x) dx \\ &= \dots = e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \dots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] + C. \end{aligned}$$

因为 $P(x)$ 为 n 次多项式,所以, $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$. 从而,上述等式括号中的导数到 $P^{(n)}(x)$ 为止.

【2067】 证明:若 $P(x)$ 为 n 次多项式,则

$$\begin{aligned} \int P(x) \cos ax dx &= \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right] + \frac{\cos ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C, \\ \int P(x) \sin ax dx &= -\frac{\cos ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right] + \frac{\sin ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \int P(x) \cos ax dx &= \frac{1}{a} \int P(x) d(\sin ax) = \frac{1}{a} P(x) \sin ax - \frac{1}{a} \int P'(x) \sin ax dx \\ &= \frac{1}{a} P(x) \sin ax + \frac{1}{a^2} \int P'(x) d(\cos ax) = \frac{1}{a} P(x) \sin ax + \frac{1}{a^2} P'(x) \cos ax - \frac{1}{a^2} \int P''(x) \cos ax dx \\ &= \frac{1}{a} P(x) \sin ax + \frac{1}{a^2} P'(x) \cos ax - \frac{1}{a^3} P''(x) \sin ax - \frac{1}{a^4} P'''(x) \cos ax + \frac{1}{a^4} \int P^{(4)}(x) \cos ax dx \\ &= \dots = \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right] + \frac{\cos ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C. \\ \int P(x) \sin ax dx &= -\frac{1}{a} \int P(x) d(\cos ax) = -\frac{1}{a} P(x) \cos ax + \frac{1}{a} \int P'(x) \cos ax dx \\ &= -\frac{1}{a} P(x) \cos ax + \frac{1}{a^2} \int P'(x) d(\sin ax) = -\frac{1}{a} P(x) \cos ax + \frac{1}{a^2} P'(x) \sin ax - \frac{1}{a^2} \int P''(x) \sin ax dx \\ &= -\frac{1}{a} P(x) \cos ax + \frac{1}{a^2} P'(x) \sin ax + \frac{1}{a^3} P''(x) \cos ax - \frac{1}{a^4} P'''(x) \sin ax + \frac{1}{a^4} \int P^{(4)}(x) \sin ax dx \\ &= \dots = -\frac{\cos ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right] + \frac{\sin ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C. \end{aligned}$$

上述导数项是有限的,其阶数 $\leq n, a \neq 0$.

求积分:

【2068】 $\int x^3 e^{3x} dx.$

解 $\int x^3 e^{3x} dx = e^{3x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{9} + \frac{6x}{27} - \frac{6}{81} \right)^{**} + C = e^{3x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27} \right) + C.$

*) 利用 2066 题的结果.

【2069】 $\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x} dx.$

解 $\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x} dx = e^{-x} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{-1} - \frac{2x - 2}{1} + \frac{2}{-1} \right)^{**} + C = -e^{-x}(x^2 + 2) + C.$

*) 利用 2066 题的结果.

【2070】 $\int x^5 \sin 5x dx.$

解 $\int x^5 \sin 5x dx = -\frac{\cos 5x}{5} \left(x^5 - \frac{20x^3}{25} + \frac{120x}{625} \right) + \frac{\sin 5x}{25} \left(5x^4 - \frac{60x^2}{25} + \frac{120}{625} \right)^{**} + C$
 $= -\frac{\cos 5x}{5} \left(x^5 - \frac{4x^3}{5} + \frac{24x}{125} \right) + \frac{\sin 5x}{25} \left(5x^4 - \frac{12x^2}{5} + \frac{24}{125} \right) + C.$

*) 利用 2067 题的结果.

【2071】 $\int (1+x^2)^2 \cos x dx.$

解 $\int (1+x^2)^2 \cos x dx = \int (1+2x^2+x^4) \cos x dx$
 $= \sin x [(1+2x^2+x^4) - (4+12x^2)+24] + \cos x [(4x+4x^3)-24x]^{**} + C$
 $= (21-10x^2+x^4) \sin x - (20x-4x^3) \cos x + C.$

*) 利用 2067 题的结果.

【2072】 $\int x^7 e^{-x^2} dx.$

解 $\int x^7 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int (x^2)^3 e^{-x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{-x^2} \left(\frac{x^8}{-1} - \frac{3x^4}{1} + \frac{6x^2}{-1} - \frac{6}{1} \right)^{**} + C$
 $= -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6) + C.$

*) 利用 2066 题的结果.

【2073】 $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx.$

解 $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int (\sqrt{x})^5 e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}} \left(x^{\frac{5}{2}} - 5x^2 + 20x^{\frac{3}{2}} - 60x + 120x^{\frac{1}{2}} - 120 \right)^{**} + C.$

*) 利用 2066 题的结果.

【2074】 $\int e^{ax} \cos^2 bx dx.$

解 $\int e^{ax} \cos^2 bx dx = \frac{1}{2} \int e^{ax} (1 + \cos 2bx) dx = \frac{1}{2a} e^{ax} + \frac{1}{2} e^{ax} \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{a^2 + 4b^2}^{**} + C.$

*) 利用 1828 题的结果.

【2075】 $\int e^{ax} \sin^3 bx dx.$

提示 注意 $e^{ax} \sin^3 bx = e^{ax} \left(\frac{3}{4} \sin bx - \frac{1}{4} \sin 3bx \right)$, 并利用 1829 题的结果.

解 $\int e^{ax} \sin^3 bx dx = \int e^{ax} \sin bx \frac{1 - \cos 2bx}{2} dx = \int e^{ax} \left(\frac{3}{4} \sin bx - \frac{1}{4} \sin 3bx \right) dx$

$$= \frac{3}{4} e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} - \frac{1}{4} e^{ax} \frac{a \sin 3bx - 3b \cos 3bx}{a^2 + 9b^2} + C.$$

*) 利用 1829 题的结果.

【2076】 $\int x e^x \sin x dx.$

解 $\int x e^x \sin x dx = \int x \sin x d(e^x) = x e^x \sin x - \int e^x (\sin x + x \cos x) dx$
 $= x e^x \sin x - \int (\sin x + x \cos x) d(e^x) = e^x (x \sin x - \sin x - x \cos x) + \int e^x (2 \cos x - x \sin x) dx$
 $= e^x (x \sin x - \sin x - x \cos x) + 2 \int e^x \cos x dx - \int x e^x \sin x dx.$

于是, $\int x e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (x \sin x - \sin x - x \cos x) + \int e^x \cos x dx$
 $= \frac{e^x}{2} (x \sin x - \sin x - x \cos x) + \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C = \frac{e^x}{2} [x(\sin x - \cos x) + \cos x] + C.$

*) 利用 1828 题的结果.

【2077】 $\int x^2 e^x \cos x dx.$

解 $\int x^2 e^x \cos x dx = \int x^2 \cos x d(e^x) = x^2 e^x \cos x - \int e^x (2x \cos x - x^2 \sin x) dx$
 $= x^2 e^x \cos x - \int (2x \cos x - x^2 \sin x) d(e^x)$
 $= x^2 e^x \cos x - e^x (2x \cos x - x^2 \sin x) + \int e^x (2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x) dx$
 $= e^x [x^2 (\sin x + \cos x) - 2x \cos x] + 2 \int e^x \cos x dx - 4 \int x e^x \sin x dx - \int x^2 e^x \cos x dx.$

于是, $\int x^2 e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} [x^2 (\sin x + \cos x) - 2x \cos x] + \int e^x \cos x dx - 2 \int x e^x \sin x dx$
 $= \frac{e^x}{2} [x^2 (\sin x + \cos x) - 2x \cos x] + \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) - 2 \frac{e^x}{2} [x(\sin x - \cos x) + \cos x] + C$
 $= \frac{e^x}{2} [x^2 (\sin x + \cos x) - 2x \sin x + (\sin x - \cos x)] + C.$

*) 利用 1828 题的结果.

**) 利用 2076 题的结果.

【2078】 $\int x e^x \sin^2 x dx.$

解 $\int x e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int x e^x (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int x e^x dx - \frac{1}{2} \int x e^x \cos 2x dx$
 $= \frac{1}{2} e^x (x - 1) - \frac{1}{2} \int x \cos 2x d(e^x) = \frac{1}{2} e^x (x - 1) - \frac{1}{2} x e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x (\cos 2x - 2x \sin 2x) dx$
 $= \frac{1}{2} e^x (x - 1) - \frac{1}{2} x e^x \cos 2x + \frac{e^x}{2} \cdot \frac{\cos 2x + 2 \sin 2x}{5} - \int x e^x \sin 2x dx,$

而 $\int x e^x \sin 2x dx = \int x \sin 2x d(e^x) = x e^x \sin 2x - \int e^x (\sin 2x + 2x \cos 2x) dx$
 $= x e^x \sin 2x - \frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) - 2 \int x e^x (1 - 2 \sin^2 x) dx$
 $= x e^x \sin 2x - \frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) - 2(x - 1) e^x + 4 \int x e^x \sin^2 x dx.$

代入得 $\int x e^x \sin^2 x dx = e^x \left[\frac{x-1}{2} - \frac{x}{10} (2 \sin 2x + \cos 2x) + \frac{1}{50} (4 \sin 2x - 3 \cos 2x) \right] + C.$

*) 利用 1828 题的结果.

* *) 利用 1829 题的结果.

【2079】 $\int (x - \sin x)^3 dx.$

解 $\int (x - \sin x)^3 dx = \int (x^3 - 3x^2 \sin x + 3x \sin^2 x - \sin^3 x) dx$
 $= \frac{x^4}{4} + 3 \int x^2 d(\cos x) + \frac{3}{2} \int x(1 - \cos 2x) dx + \int (1 - \cos^2 x) d(\cos x)$
 $= \frac{x^4}{4} + 3x^2 \cos x - 6 \int x \cos x dx + \frac{3}{4} x^2 - \frac{3}{4} \int x d(\sin 2x) + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x$
 $= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - 6 \int x d(\sin x) - \frac{3}{4} x \sin 2x + \frac{3}{4} \int \sin 2x dx + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x$
 $= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x - \frac{3}{4} x \sin 2x + \cos x - \frac{3}{8} \cos 2x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$
 $= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - x \left(6 \sin x + \frac{3}{4} \sin 2x \right) - \left(5 \cos x + \frac{3}{8} \cos 2x \right) - \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$

【2080】 $\int \cos^2 \sqrt{x} dx.$

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \sqrt{x} dx &= 2 \int t \cos^2 t dt = \int t(1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int t d(\sin 2t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} t \sin 2t - \frac{1}{2} \int \sin 2t dt \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4} \cos(2\sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

【2081】 证明:若 R 为有理函数,数 a_1, a_2, \dots, a_n 为可公约的,则积分

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$$

是初等函数.

证明思路 由题设 a_1, a_2, \dots, a_n 为可公约的数,故存在一个不为零的实数 α ,使有

$$a_1 = k_1 \alpha, a_2 = k_2 \alpha, \dots, a_n = k_n \alpha,$$

其中 k_1, k_2, \dots, k_n 为整数.

令 $e^{\alpha x} = t$, 即可获证.

证 按题意 a_1, a_2, \dots, a_n 为可公约的数,于是,存在一个实数 α ,使得

$$a_1 = k_1 \alpha, a_2 = k_2 \alpha, \dots, a_n = k_n \alpha \quad (\alpha \neq 0),$$

其中 k_1, k_2, \dots, k_n 为整数.

设 $e^{\alpha x} = t$, 则 $x = \frac{1}{\alpha} \ln t, dx = \frac{1}{\alpha t} dt$. 于是,

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx = \frac{1}{\alpha} \int R(t^{k_1}, t^{k_2}, \dots, t^{k_n}) \frac{dt}{t} = \int R^*(t) dt,$$

其中 $R^*(t)$ 是 t 的有理函数. 因此,积分 $\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$ 为初等函数.

求下列积分:

【2082】 $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$

解 $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2} = \int \frac{(1+e^x) - e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int \frac{dx}{1+e^x} - \int \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2} = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx - \int \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$
 $= x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C.$

【2083】 $\int \frac{e^{2x} dx}{1+e^x}.$

解 $\int \frac{e^{2x} dx}{1+e^x} = \int \frac{(e^{2x}-1)+1}{1+e^x} dx = \int (e^x-1) dx + \int \frac{1}{1+e^x} dx = e^x - x + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$
 $= e^x - \ln(1+e^x) + C.$

【2084】 $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}.$

解 $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2} = \int \frac{dx}{(e^x+2)(e^x-1)} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{e^x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{e^x+2} dx$
 $= -\frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x-1}\right) dx - \frac{1}{6} \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+2}\right) dx = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln|e^x-1| - \frac{x}{6} + \frac{1}{6} \ln(e^x+2) + C$
 $= -\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \ln|e^x-1| + \frac{1}{6} \ln(e^x+2) + C.$

【2085】 $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}.$

解 设 $e^{\frac{x}{6}} = t$, 则 $x = 6 \ln t$, $dx = \frac{6}{t} dt$. 代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} &= 6 \int \frac{dt}{t(1+t^3+t^2+t)} \\ &= 6 \int \frac{dt}{t(t+1)(t^2+1)} = 6 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{t+1}{2(t^2+1)} \right] dt \\ &= 6 \ln t - 3 \ln(t+1) - \frac{3}{2} \ln(1+t^2) - 3 \arctan t + C \\ &= x - 3 \ln \left[(1+e^{\frac{x}{3}}) \sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}} \right] - 3 \arctan(e^{\frac{x}{6}}) + C. \end{aligned}$$

【2086】 $\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2} dx.$

解 设 $e^{\frac{x}{4}} = t$, 则 $x = 4 \ln t$, $dx = \frac{4}{t} dt$. 代入得

$$\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2} dx = 4 \int \frac{1+t^2}{t(1+t)^2} dt = 4 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{2}{(1+t)^2} \right] dt = 4 \ln t + \frac{8}{1+t} + C = x + \frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}} + C.$$

【2087】 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} \sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}} = -2 \int \frac{d(e^{-\frac{x}{2}})}{\sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}} = -2 \arcsin(e^{-\frac{x}{2}}) + C.$

【2088】 $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx.$

解 $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx = \int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$
 $= \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2-1}} + \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin(e^{-x}) + C.$

【2089】 $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} dx.$

解 $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} dx = \int \frac{e^{2x}+4e^x-1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}} dx$
 $= \int \frac{2e^{2x}+4e^x}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}} dx + 2 \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}$
 $= \int \frac{d(e^{2x}+4e^x-1)}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}} + 2 \int \frac{d(e^x+2)}{\sqrt{(e^x+2)^2-5}} + \int \frac{d(e^{-x}-2)}{\sqrt{5-(e^{-x}-2)^2}}$

$$= \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} + 2\ln(e^x + 2 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}) - \arcsin \frac{2e^x - 1}{\sqrt{5}e^x} + C.$$

【2090】 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} = \frac{1}{2} \int e^{-x} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) dx$
 $= -\frac{1}{2} \int (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) d(e^{-x})$
 $= -\frac{e^{-x}}{2} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{1}{\sqrt{1-e^x}} \right) dx$
 $= -\frac{1}{2} e^{-x} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) + \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{4} I_2.$

对于 $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, 设 $\sqrt{1+e^x} = t$, 则 $x = \ln(t^2 - 1)$, $dx = \frac{2tdt}{t^2 - 1}$.

于是, $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \ln \frac{t-1}{t+1} + C = \ln \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} + C_1.$

对于 $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$, 设 $\sqrt{1-e^x} = t$, 则 $x = \ln(1-t^2)$, $dx = -\frac{2tdt}{1-t^2}$.

于是, $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}} = -2 \int \frac{dt}{1-t^2} = -\ln \frac{1+t}{1-t} + C_2 = -\ln \frac{1+\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e^x}} + C_2.$

代入得 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} = -\frac{e^{-x}}{2} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) + \frac{1}{4} \ln \frac{(\sqrt{1+e^x} - 1)(1 - \sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x} + 1)(1 + \sqrt{1-e^x})} + C.$

【2091】 证明:若 R 为有理函数,其分母仅有实根,则积分 $\int R(x)e^{ax} dx$ 可用初等函数和超越函数

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \text{li}(e^{ax}) + C, \text{ 式中 } \text{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}$$

来表示.

证 因为 R 的分母仅有实根,所以仅包含形如 $(x-a_i)^{k_i}$ 的因子 ($i=1,2,\dots,l$). 分解 $R(x)$ 为部分分式得

$$R(x) = P(x) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}.$$

其中 $P(x)$ 为 x 的多项式, A_{ij} 是常数. 从而,积分

$$\int R(x)e^{ax} dx = \int P(x)e^{ax} dx + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij} \int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j} dx.$$

上式右端第一个积分显然是初等函数. 而积分 $\int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j} dx$ 可用初等函数和超越函数来表示. 事实上, 设 $x-a_i=t$, 则

$$\int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j} dx = \int \frac{e^{a(a_i+t)}}{t^j} dt = \frac{e^{aa_i}}{1-j} \int e^{at} d\left(\frac{1}{t^{j-1}}\right) = \frac{e^{aa_i}}{1-j} e^t \cdot \frac{1}{t^{j-1}} - \frac{ae^{aa_i}}{1-j} \int \frac{e^{at}}{t^{j-1}} dt.$$

这样,被积函数中分母的次数便降低一次,再继续运用分部积分法 ($j-2$) 次,即可得

$$\int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j} dx = g_{ij}(x) + B_{ij} \text{li}(e^{a(x-a_i)}),$$

其中 $g_{ij}(x)$ 为 x 的初等函数, B_{ij} 为常数. 因此,积分

$$\int R(x)e^{ax} dx = \int P(x)e^{ax} dx + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij} g_{ij}(x) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij} B_{ij} \text{li}(e^{a(x-a_i)})$$

是初等函数与超越函数之和.

【2092】 若 $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$, a_0, a_1, \dots, a_n 为常数,则在什么情形下,积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$

为初等函数?

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{a_k}{x^k} e^x dx &= -\frac{a_k}{k-1} \cdot \frac{e^x}{x^{k-1}} + \frac{a_k}{k-1} \int \frac{e^x}{x^{k-1}} dx = \cdots \\ &= -\frac{a_k}{k-1} \cdot \frac{e^x}{x^{k-1}} - \frac{a_k}{(k-1)(k-2)} \cdot \frac{e^x}{x^{k-2}} - \cdots - \frac{a_k}{(k-1)!} \cdot \frac{e^x}{x} + \frac{a_k}{(k-1)!} \int \frac{e^x}{x} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{于是,} \quad \int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx &= \int \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k}\right) e^x dx = \sum_{k=0}^n \int \frac{a_k}{x^k} dx \\ &= -\sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_k}{(k-1)(k-2)\cdots(k-j)} \cdot \frac{e^x}{x^{k-j}} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} \int \frac{e^x}{x} dx + a_0 e^x.\end{aligned}$$

因而,若 $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} = 0$, 即 $a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0$, 则积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx$ 是初等函数.

求积分:

$$\text{【2093】} \quad \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx &= \int \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x dx = e^x - 4\text{li}(e^x) - 4 \int e^x d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= e^x - 4\text{li}(e^x) - \frac{4}{x} e^x + 4 \int \frac{e^x}{x} dx = e^x \left(1 - \frac{4}{x}\right) + C.\end{aligned}$$

$$\text{【2094】} \quad \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx = -e^{-x} - \text{li}(e^{-x}) + C.$$

$$\text{【2095】} \quad \int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \frac{e^{2x}}{(x-2)(x-1)} dx = \int \frac{e^{2x}}{x-2} dx - \int \frac{e^{2x}}{x-1} dx \\ &= e^4 \int \frac{e^{2(x-2)}}{x-2} d(x-2) - e^2 \int \frac{e^{2(x-1)}}{x-1} d(x-1) = e^4 \text{li}(e^{2x-4}) - e^2 \text{li}(e^{2x-2}) + C.\end{aligned}$$

$$\text{【2096】} \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx = - \int x e^x d\left(\frac{1}{x+1}\right) = -x e^x \frac{1}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{x e^x}{x+1} + e^x + C = \frac{e^x}{x+1} + C.$$

$$\text{【2097】} \quad \int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx &= \int (x^2 + 4x + 12) e^{2x} dx + 32 \int \frac{e^{2x}}{x-2} dx + 16 \int \frac{e^{2x}}{(x-2)^2} dx \\ &= e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{21}{4}\right) + 32e^4 \text{li}(e^{2x-4}) - 16 \int e^{2x} d\left(\frac{1}{x-2}\right) \\ &= \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2}\right) + 32e^4 \text{li}(e^{2x-4}) - \frac{16e^{2x}}{x-2} + 32 \int \frac{e^{2x}}{x-2} dx \\ &= \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2} - \frac{32}{x-2}\right) + 64e^4 \text{li}(e^{2x-4}) + C.\end{aligned}$$

*) 利用 2066 题的结果.

求含有 $\ln f(x)$, $\arctan f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$ 等函数的积分, 其中 $f(x)$ 为代数函数:

$$\text{【2098】} \quad \int \ln^n x dx \quad (n \text{ 为正整数}).$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \ln^n x dx &= x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx = x \ln^n x - n x \ln^{n-1} x + n(n-1) \int \ln^{n-2} x dx = \cdots \\ &= x [\ln^n x - n \ln^{n-1} x + n(n-1) \ln^{n-2} x - \cdots + (-1)^{n-1} n! \ln x + (-1)^n n!] + C.\end{aligned}$$

【2099】 $\int x^3 \ln^3 x dx.$

解 $\int x^3 \ln^3 x dx = \frac{1}{4} \int \ln^3 x d(x^4)$
 $= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{4} \int x^3 \ln^2 x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} \int \ln^2 x d(x^4)$
 $= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} x^4 \ln^2 x + \frac{3}{8} \int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} x^4 \ln^2 x + \frac{3}{32} \int \ln x d(x^4)$
 $= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} x^4 \ln^2 x + \frac{3}{32} x^4 \ln x - \frac{3}{32} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \left(\ln^3 x - \frac{3}{4} \ln^2 x + \frac{3}{8} \ln x - \frac{3}{32} \right) + C.$

【2100】 $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx.$

解 $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx = -\frac{1}{2} \int \ln^3 x d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x + \frac{3}{2} \int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4} \int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$
 $= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x - \frac{3}{4} \int \ln x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$
 $= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x - \frac{3}{4x^2} \ln x + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \left(\ln^3 x + \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x + \frac{3}{4} \right) + C.$

【2101】 $\int \ln[(x+a)^{x-a}(x+b)^{x-b}] \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

解 $\int \ln[(x+a)^{x-a}(x+b)^{x-b}] \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \int \frac{\ln(x+a)}{x+b} dx + \int \frac{\ln(x+b)}{x+a} dx$
 $= \int \ln(x+a) d[\ln(x+b)] + \int \ln(x+b) d[\ln(x+a)]$
 $= \ln(x+a) \ln(x+b) - \int \ln(x+b) d[\ln(x+a)] + \int \ln(x+b) d[\ln(x+a)]$
 $= \ln(x+a) \ln(x+b) + C.$

【2102】 $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

解 $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2 \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$
 $= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2 \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d(\sqrt{1+x^2})$
 $= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2 \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2 \int dx$
 $= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2 \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$

【2103】 $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx.$

解 $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx = x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 $= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x + C.$

【2104】 $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

解 $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \ln x d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$

【2105】 $\int x \arctan(x+1) dx.$

解 $\int x \arctan(x+1) dx = \frac{1}{2} \int \arctan(x+1) d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \arctan(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+2x+2} dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan(x+1) - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right) dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) + C.$$

【2106】 $\int \sqrt{x} \arctan \sqrt{x} dx.$

解 $\int \sqrt{x} \arctan \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \int \arctan \sqrt{x} d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \arctan \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x} dx$
 $= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \arctan \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \arctan \sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln(1+x) + C.$

【2107】 $\int x \arcsin(1-x) dx.$

解 $\int x \arcsin(1-x) dx = \frac{1}{2} \int \arcsin(1-x) d(x^2)$
 $= \frac{1}{2} x^2 \arcsin(1-x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx.$

对于积分 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx$, 设 $1-x=t$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx &= - \int \frac{1-2t+t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{-t^2+1}{\sqrt{1-t^2}} dt - 2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + 2 \int \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int \sqrt{1-t^2} dt - 2 \arcsin t - 2 \sqrt{1-t^2} = \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t - 2 \arcsin t - 2 \sqrt{1-t^2} + C_1 \\ &= \frac{-3-x}{2} \sqrt{2x-x^2} - \frac{3}{2} \arcsin(1-x) + C_1. \end{aligned}$$

于是, $\int x \arcsin(1-x) dx = \frac{2x^2-3}{4} \arcsin(1-x) - \frac{3+x}{4} \sqrt{2x-x^2} + C.$

【2108】 $\int \arcsin \sqrt{x} dx.$

解 $\int \arcsin \sqrt{x} dx = x \arcsin \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

对于积分 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$, 设 $\sqrt{x}=t$, 则 $dx=2t dt$, 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx &= 2 \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = -2 \int \sqrt{1-t^2} dt + 2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= -t \sqrt{1-t^2} - \arcsin t + 2 \arcsin t + C_1 = \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + C_1. \end{aligned}$$

因而, $\int \arcsin \sqrt{x} dx = \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x-x^2} + C.$

【2109】 $\int x \arccos \frac{1}{x} dx.$

解 $\int x \arccos \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int \arccos \frac{1}{x} d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} dx$
 $= \frac{1}{2} x^2 \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{2} (\operatorname{sgn} x) \sqrt{x^2-1} + C.$

【2110】 $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx.$

解 $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx = \int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} d(x+1) = (x+1) \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - \operatorname{sgn}(1-x) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
 $= (x+1) \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} \operatorname{sgn}(1-x) + C,$

其中用到了

$$\left(\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2} \left[(1+x) \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \right] = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2} \sqrt{x}} = \frac{1}{1+x} \operatorname{sgn}(1-x) \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

【2111】 $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

解 $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \arccos x d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln \sqrt{1-x^2} + C.$

【2112】 $\int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

解 $\int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \arccos x d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C.$

【2113】 $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx.$

解 $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx$
 $= \frac{1}{2} \int \arctan x \ln(1+x^2) d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int x^2 \left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{2x \arctan x}{1+x^2} \right] dx$
 $= \frac{1}{2} x^2 \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) dx + \frac{1}{2} \int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx + \int \frac{x \arctan x}{1+x^2} dx - \int x \arctan x dx$
 $= \frac{1}{2} x^2 \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \int \frac{2x^2 dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} \arctan x \ln(1+x^2) - \int \frac{x \arctan x}{1+x^2} dx$
 $+ \int \frac{x \arctan x}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} x^2 \arctan x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$
 $= \frac{1}{2} x^2 \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) + x - \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 \arctan x + \frac{1}{2} x$
 $- \frac{1}{2} \arctan x + C$
 $= x - \arctan x + \left(\frac{1+x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} \right) [\ln(1+x^2) - 1] + C.$

【2114】 $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

解 $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx$
 $= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(1 - \frac{1}{1-x^2} \right) dx = \frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x + C.$

【2115】 $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

解 $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x}{1+x^2} dx$
 $= \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \ln \sqrt{1+x^2} + C.$

求含有双曲函数的积分:

【2116】 $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx.$

解 $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{sh}^2 2x dx = \frac{1}{8} \int \operatorname{sh}^2 2x d(2x) = -\frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} + C.$

*) 利用 1761 题的结果.

【2117】 $\int \operatorname{ch}^4 x dx.$

解 $\int \operatorname{ch}^4 x dx = \int \left(\frac{1+\operatorname{ch} 2x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{1}{4} \operatorname{ch}^2 2x \right) dx$
 $= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 4x \right) + C = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x + C.$

*) 利用 1762 题的结果.

【2118】 $\int \operatorname{sh}^3 x dx.$

解 $\int \operatorname{sh}^3 x dx = \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} x dx = \int (\operatorname{ch}^2 x - 1) d(\operatorname{ch} x) = \frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C.$

【2119】 $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx.$

解 $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx = \int \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 4x - \operatorname{ch} 2x) \operatorname{sh} 2x dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 4x \operatorname{sh} 2x dx - \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 2x \operatorname{sh} 2x dx$
 $= \frac{1}{4} \int (\operatorname{sh} 6x - \operatorname{sh} 2x) dx - \frac{1}{4} \int \operatorname{sh} 4x dx = \frac{1}{24} \operatorname{ch} 6x - \frac{1}{16} \operatorname{ch} 4x - \frac{1}{8} \operatorname{ch} 2x + C.$

【2120】 $\int \operatorname{th} x dx.$

解 $\int \operatorname{th} x dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \ln(\operatorname{ch} x) + C.$

【2121】 $\int \operatorname{coth}^2 x dx.$

解 $\int \operatorname{coth}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \int \frac{1+\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = x - \operatorname{coth} x + C.$

【2122】 $\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx.$

解 $\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx = \int \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{e^{2x} - e^{-2x}}} dx = \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} - 1}} - \int \frac{e^{-2x} dx}{\sqrt{1 - e^{-4x}}}$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x})}{\sqrt{(e^{2x})^2 - 1}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{-2x})}{\sqrt{1 - (e^{-2x})^2}} = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) + \frac{1}{2} \arcsin(e^{-2x}) + C.$

【2123】 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}.$

解 设 $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$, 则 $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $x = \ln \frac{1+t}{1-t}$, $dx = \frac{2}{1-t^2} dt$. 代入得

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1+2\operatorname{th} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

【2124】 $\int \operatorname{sh} ax \sin bx dx.$

解 $\int \operatorname{sh} ax \sin bx dx = \frac{1}{2} \int e^{ax} \sin bx dx - \frac{1}{2} \int e^{-ax} \sin bx dx$
 $= \frac{1}{2} e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2} e^{-ax} \frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} + C = \frac{a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx}{a^2 + b^2} + C.$

*) 利用 1829 题的结果.

【2125】 $\int \operatorname{sh} ax \cos bx dx.$

解 $\int \operatorname{sh} ax \cos bx dx = \frac{1}{2} \int e^{ax} \cos bx dx - \frac{1}{2} \int e^{-ax} \cos bx dx$

$$= \frac{1}{2} e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2} e^{-ax} \frac{a \cos bx - b \sin bx}{a^2 + b^2} + C = \frac{a \cosh ax \cos bx - b \sinh ax \sin bx}{a^2 + b^2} + C.$$

*) 利用 1828 题的结果.

§ 6. 求函数积分的各种例子

求积分:

【2126】 $\int \frac{dx}{x^5(1+x^2)}.$

解 $\int \frac{dx}{x^5(1+x^2)} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^5(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^5} - \int \frac{dx}{x^3(1+x^2)} = -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^3(1+x^2)} dx$
 $= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{dx}{x^3} + \int \frac{x^2}{x^3(1+x^2)} dx = -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$
 $= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \arctan x + C.$

【2127】 $\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3}.$

解 $\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3} = \int \frac{(x^2-1)+1}{(1-x^2)^3} dx = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2-1)^3}$
 $= -\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} - \left[\frac{2x}{2(-4)(x^2-1)^2} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} \right]^{**}$
 $= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} + \frac{x}{4(1-x^2)^2} = -\frac{1}{4} \left\{ -\frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-1} \right\}^{**} + \frac{x}{4(1-x^2)^2}$
 $= \frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$

*) 利用 1921 题的递推公式.

【2128】 $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}.$

提示 注意 $1+x^4+x^8=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$, $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,
 $x^4-x^2+1=(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1).$

解 因为

$$1+x^4+x^8=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1),$$

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

$$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2=(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1),$$

所以, $\frac{1}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} - \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} \right), \quad \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1} \right),$

$$\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+1} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{3}+1}.$$

于是, $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1} dx - \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1} dx$
 $= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \right] + \frac{1}{4\sqrt{3}} [\ln(x^2+x\sqrt{3}+1) - \ln(x^2-x\sqrt{3}+1)] + C_1$
 $= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1} + C.$

【2129】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

提示 令 $\sqrt[6]{x} = t$.

解 设 $\sqrt[6]{x} = t$, 则 $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5 dt$. 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(1+t) + C \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C \quad (x > 0).\end{aligned}$$

【2130】 $\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx.$

提示 令 $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$, 并利用 1921 题的递推公式.

解 设 $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$, 则 $x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$. 代入得

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx &= -2 \int \frac{dt}{(t^2+1)^4} \\ &= -2 \left[\frac{t}{6(t^2+1)^3} + \frac{5t}{24(t^2+1)^2} + \frac{5t}{16(t^2+1)} + \frac{5}{16} \arctan t \right] + C_1 \\ &= -\frac{1}{24} (8x^2 + 10x + 15) \sqrt{x(1-x)} - \frac{5}{8} \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} + C_1 \\ &= -\frac{1}{24} (8x^2 + 10x + 15) \sqrt{x(1-x)} + \frac{5}{8} \arcsin \sqrt{x} + C \quad (0 < x < 1).\end{aligned}$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

【2131】 $\int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx.$

解 设 $x = \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \cos t dt$, 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sin t + 2}{\sin^2 t} dt = \int \frac{dt}{\sin t} + 2 \int \frac{dt}{\sin^2 t} = \ln |\csc t - \cot t| - 2 \cot t + C \\ &= -\ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x} + C \quad (0 < |x| < 1).\end{aligned}$$

【2132】 $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx.$

提示 令 $\sqrt{1-x\sqrt{x}} = t$.

解 设 $\sqrt{1-x\sqrt{x}} = t$, 则 $x = (1-t^2)^{\frac{2}{3}}$, $dx = -\frac{4}{3} t(1-t^2)^{-\frac{1}{3}} dt$. 代入得

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx = -\frac{4}{3} \int dt = -\frac{4}{3} t + C = -\frac{4}{3} \sqrt{1-x\sqrt{x}} + C \quad (0 < x < 1).$$

【2133】 $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

解 设 $\sqrt{1+x^2} = t$, 则 $x^2 = t^2 - 1$, $x dx = t dt$. 代入得

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int (t^2 - 1)^2 dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t + C = \frac{1}{15} (8 - 4x^2 + 3x^4) \sqrt{1+x^2} + C.$$

【2134】 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$

提示 令 $\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}} = t$.

解 设 $\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}} = t$, 则 $x = \frac{1}{t^3+1}$, $dx = -\frac{3t^2}{(t^3+1)^2} dt$. 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} &= -3 \int \frac{t}{t^3+1} dt = \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt \\ &= \ln|t+1| - \frac{1}{2} \int \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2-t+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C,\end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$.

【2135】 $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^3+x^6}}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^3+x^6}} &= \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}} = -\frac{1}{3} \int \frac{d(x^{-3}+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x^{-3}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} \\ &= -\frac{1}{3} \ln \left| x^{-3}+\frac{1}{2}+\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1} \right| + C_1 = -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{2+x^3+2\sqrt{x^6+x^3+1}}{x^3} \right| + C.\end{aligned}$$

注 以上实际已设 $x > 0$. 对于 $x < 0$, 利用 1856 题的方法可得同一结果.

【2136】 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^4-2x^2-1}}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \frac{dx}{x \sqrt{x^4-2x^2-1}} &= \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-2x^{-2}-x^{-4}}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(x^{-2}+1)}{\sqrt{2-(x^{-2}+1)^2}} = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^{-2}+1}{\sqrt{2}}\right) + C_1 \\ &= -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right) + C_1 = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right) + C.\end{aligned}$$

【2137】 $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} dx.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{(1+\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})} dx \\ &= \int \frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = -\frac{2}{x} - x - 2 \int \sqrt{1-x^2} d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{2}{x} - x - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2+x^2}{x} - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - 2 \arcsin x + C.\end{aligned}$$

【2138】 $\int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}} &= \int \frac{(1+x)(x-\sqrt{x+x^2})}{(x+\sqrt{x+x^2})(x-\sqrt{x+x^2})} dx \\ &= \int \frac{x+x^2-\sqrt{x+x^2}-x\sqrt{x+x^2}}{-x} dx = -x - \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} dx + \int \sqrt{x+x^2} dx \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 + 2 \int \sqrt{1+(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}) + \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} d\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x} \sqrt{1+x} + \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + \frac{2x+1}{4} \sqrt{x+x^2} - \frac{1}{8} \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right) + C_1 \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5+2x}{4} \sqrt{x+x^2} + \frac{1}{2} \ln(2x+1+2\sqrt{x+x^2}) - \frac{1}{8} \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right) + C_1\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2} + \frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right) + C,$$

其中设 $x > 0$, 对于 $x < -1$, 同样可获得上述结果, 但要注意在对数中要加绝对值.

【2139】 $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx &= -\int \ln(1+x+x^2) d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \int \frac{2x+1}{(x+1)(1+x+x^2)} dx = -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \int \left(\frac{x+2}{1+x+x^2} - \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x+1}{1+x+x^2} + \frac{3}{1+x+x^2}\right) dx - \ln|1+x| \\ &= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \frac{1}{2} \ln(1+x+x^2) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \ln|1+x| + C \\ &= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x)^2}{1+x+x^2} + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

【2140】 $\int (2x+3)\arccos(2x-3)dx.$

解
$$\begin{aligned} \int (2x+3)\arccos(2x-3)dx &= \int \arccos(2x-3)d(x^2+3x) \\ &= (x^2+3x)\arccos(2x-3) + \int \frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}} dx \\ &= (x^2+3x)\arccos(2x-3) - \int \sqrt{-x^2+3x-2} dx - 3 \int \frac{-2x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}} dx + 7 \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} \\ &= (x^2+3x)\arccos(2x-3) - \int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2} d\left(x-\frac{3}{2}\right) - 6\sqrt{-x^2+3x-2} \\ &\quad + 7 \int \frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} \\ &= (x^2+3x)\arccos(2x-3) - \frac{2x-3}{4}\sqrt{-x^2+3x-2} - \frac{1}{8}\arcsin(2x-3) - 6\sqrt{-x^2+3x-2} \\ &\quad - 7\arccos(2x-3) + C_1 \\ &= \left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\arccos(2x-3) - \frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2} + C \quad (1 < x < 2). \end{aligned}$$

【2141】 $\int x \ln(4+x^4) dx.$

解
$$\begin{aligned} \int x \ln(4+x^4) dx &= \frac{1}{2} \int \ln(4+x^4) d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \ln(4+x^4) - 2 \int \frac{x^3}{4+x^4} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(4+x^4) - 2 \int \left(x - \frac{4x}{4+x^4}\right) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(4+x^4) - x^2 + 2 \arctan\left(\frac{x^2}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

【2142】 $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= (\operatorname{sgn} x) \int \frac{\arcsin x dx}{x^3 \sqrt{x^{-2}-1}} + \int \arcsin x d(\arcsin x) = -(\operatorname{sgn} x) \int \arcsin x d(\sqrt{x^{-2}-1}) + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 \\ &= -(\operatorname{sgn} x) \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} \arcsin x - \int \frac{dx}{|x|} \right) + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 \end{aligned}$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}(\arcsin x)^2 + \ln|x| + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C \quad (0 < |x| < 1).$$

【2143】 $\int \frac{x \ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

解 $\int \frac{x \ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \ln(1+\sqrt{1+x^2}) d(1+\sqrt{1+x^2})$
 $= (1+\sqrt{1+x^2}) \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = (1+\sqrt{1+x^2}) \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$

【2144】 $\int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx.$

解 $\int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{3} \int \ln \sqrt{x^2-1} d[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}]$
 $= \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \ln \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{3} \int (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{x^2-1} dx.$

对于右端的积分, 设 $\sqrt{x^2+1} = t$, 则 $x^2+1 = t^2$, $x dx = t dt$. 于是,

$$-\frac{1}{3} \int (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \frac{x dx}{x^2-1} = -\frac{1}{3} \int \frac{t^4 dt}{t^2-2} = -\frac{1}{3} \int \left(t^2 + 2 + \frac{4}{t^2-2} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{9} t^3 - \frac{2}{3} t - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + C = -\frac{x^2+7}{9} \sqrt{1+x^2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}} + C.$$

最后得到

$$\int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \ln \sqrt{x^2-1} - \frac{x^2+7}{9} \sqrt{1+x^2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}} + C$$

($|x| > 1$).

【2145】⁺ $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$

解 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx = - \int \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} d(\sqrt{1-x^2})$
 $= -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx.$

右端的积分

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx = \int \frac{(1-x^2)(2-x)}{x(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{2+x-x^2}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 2 \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2 \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$= -2 \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \right| + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1 = -2 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1.$$

于是, $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx = \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} \right) \sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{2} \arcsin x + C \quad (0 < x < 1).$

【2146】 $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$

解 设 $\tan \frac{x}{2} = t$, 不妨限制 $-\pi < x < \pi$, 则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. 代入得

$$\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(1+t+t^2) - \frac{1}{2}(2t+1) + \frac{1}{2}}{(1+t+t^2)^2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t+t^2} - \frac{1}{4} \int \frac{(2t+1)dt}{(1+t+t^2)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1+t+t^2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4(1+t+t^2)} + \frac{1}{4} \left[\frac{2t+1}{3(1+t+t^2)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) \right]^{**} + C_1 \\
&= \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1+2\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\cos x}{3(2+\sin x)}^{**} + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

$$\begin{aligned}
**) \quad \frac{1}{4(1+t+t^2)} + \frac{2t+1}{12(1+t+t^2)} &= \frac{t+2}{6(1+t+t^2)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin x + 1 + \cos x}{\frac{1}{2} \sin x + 1} = \frac{1}{6} + \frac{\cos x}{3(2+\sin x)}.
\end{aligned}$$

【2147】 $\int \frac{\sin^4 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$

解 $\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cos^4 x = [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x]^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x = \frac{1}{8} (\sin^4 2x - 8\sin^2 2x + 8) \\
&= \frac{1}{8} (\sin^2 2x - 4 - 2\sqrt{2})(\sin^2 2x - 4 + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{32} (\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2})(\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

于是, $\int \frac{\sin^4 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx = 32 \cdot \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[\int \frac{\sin^4 x}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}} dx - \int \frac{\sin^4 x}{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}} dx \right]$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2})}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2})}{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}} + C.$$

【2148】 $\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1+\cos x}}.$

解 设 $1+\cos x=t^2$, 并限制 $t>0$, 则 $\sin x=t\sqrt{2-t^2}$, $dx=-\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}dt$. 代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1+\cos x}} &= -\int \frac{2dt}{t^2(2-t^2)} = -\int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2-t^2}\right) dt = \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}} + C.
\end{aligned}$$

【2149】 $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \arctan x dx.$

解 $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \arctan x dx = \int \left(a - \frac{a-b}{x^2+1}\right) \arctan x dx = a x \arctan x - a \int \frac{x dx}{1+x^2} - \frac{a-b}{2} (\arctan x)^2$

$$= a \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] - \frac{a-b}{2} (\arctan x)^2 + C.$$

【2150】 $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx.$

解 $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \int \left(a + \frac{a+b}{x^2-1}\right) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx$

$$\begin{aligned}
&= ax \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - a \int \frac{2x dx}{x^2-1} + \frac{a+b}{2} \int \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| d \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \\
&= a \left(x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \ln |x^2-1| \right) + \frac{a+b}{4} \ln^2 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.
\end{aligned}$$

【2151】 $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$

解 $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \ln x d \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C \\
&= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.
\end{aligned}$$

【2152】 $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

解 $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \arctan x d(\sqrt{1+x^2}) = \sqrt{1+x^2} \arctan x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

【2153】⁺ $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$

解 $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}} = -\int \frac{d(1+\cos 2x)}{\sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}} = -\ln(1+\cos 2x + \sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}) + C_1$

$$= -\ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}) + C.$$

【2154】 $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

解 $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int x^2 \arccos x d(\sqrt{1-x^2})$

$$\begin{aligned}
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x + \int \sqrt{1-x^2} \left(2x \arccos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{2}{3} \int \arccos x d[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}] - \int x^2 dx \\
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos x - \frac{2}{3} \int (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3} x^3 \\
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos x - \frac{2}{3} x + \frac{2}{9} x^3 - \frac{1}{3} x^3 + C \\
&= -\frac{6x+x^3}{9} - \frac{2+x^2}{3} \sqrt{1-x^2} \arccos x + C.
\end{aligned}$$

【2155】 $\int \frac{x^4 \arctan x}{1+x^2} dx.$

解 $\int \frac{x^4 \arctan x}{1+x^2} dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) \arctan x dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \int \arctan x d(x^3) - \int \arctan x dx + \int \arctan x d(\arctan x) \\
&= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{1+x^2} - x \arctan x + \int \frac{x dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \\
&= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \\
&= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6}x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \arctan x + \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \frac{2}{3} \ln(1+x^2) + C.$$

【2156】 $\int \frac{x \operatorname{arccot} x}{(1+x^2)^2} dx.$

解 $\int \frac{x \operatorname{arccot} x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \operatorname{arccot} x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{\operatorname{arccot} x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
 $= -\frac{\operatorname{arccot} x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \left[\frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arccot} x \right]^* + C = -\frac{1-x^2}{4(1+x^2)} \operatorname{arccot} x - \frac{x}{4(1+x^2)} + C.$

*) 利用 1921 题的递推公式.

【2157】 $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx.$

解 $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$
 $= \frac{1}{2(1-x^2)} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}.$

对于右端积分设 $x = \tan t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sqrt{1+x^2} = \sec t$, $dx = \sec^2 t dt$. 代入得

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec t dt}{1-\tan^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}} \right| + C,$$

于是, $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx = \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}} \right| + C.$

【2158】 $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$

解 $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int x \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x\right) dx$
 $= x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{2} - \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 $= x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$

于是, $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} (\arcsin x)^2 + C \quad (|x| < 1).$

【2159】 $\int x(1+x^2) \operatorname{arccot} x dx.$

解 $\int x(1+x^2) \operatorname{arccot} x dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{arccot} x d[(1+x^2)^2] = \frac{1}{4} (1+x^2)^2 \operatorname{arccot} x + \frac{1}{4} \int (1+x^2) dx$
 $= \frac{1}{4} (1+x^2)^2 \operatorname{arccot} x + \frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + C.$

【2160】 $\int x^x (1 + \ln x) dx.$

解 $\int x^x (1 + \ln x) dx = \int e^{x \ln x} (1 + \ln x) dx = \int e^{x \ln x} d(x \ln x) = e^{x \ln x} + C = x^x + C \quad (x > 0).$

【2161】 $\int \frac{\operatorname{arcsine}^x}{e^x} dx.$

解 $\int \frac{\operatorname{arcsine}^x}{e^x} dx = - \int \operatorname{arcsine}^x d(e^{-x}) = -e^{-x} \operatorname{arcsine}^x + \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$$\begin{aligned}
&= -e^{-x} \operatorname{arcsine}^x - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2 - 1}} = -e^{-x} \operatorname{arcsine}^x - \ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} - 1}) + C \\
&= x - e^{-x} \operatorname{arcsine}^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}) + C \quad (x < 0).
\end{aligned}$$

【2162】 $\int \frac{\operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} dx.$

解 $\int \frac{\operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} dx = \int \left(e^{-\frac{x}{2}} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x} \right) \operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}} dx$

$$\begin{aligned}
&= -2 \int \operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}} d(e^{-\frac{x}{2}}) - 2 \int \operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}} d(\operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}}) = -2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}} + \int \frac{dx}{1+e^x} - (\operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}})^2 \\
&= -2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}} + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx - (\operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}})^2 \\
&= -2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}} + x - \ln(1+e^x) - (\operatorname{arctane}^{\frac{x}{2}})^2 + C.
\end{aligned}$$

【2163】 $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2 - (e^{x-1}+1)^2}.$

解 $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2 - (e^{x-1}+1)^2} = \int \frac{dx}{(e^{x+1}-e^{x-1})(e^{x+1}+e^{x-1}+2)} = \int \frac{dx}{e^{2x}(e-e^{-1})(e+e^{-1}+2e^{-x})}$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dx}{e^{2x} 2\operatorname{sh}1(2\operatorname{ch}1+2e^{-x})} = \int \frac{dx}{4e^x \operatorname{sh}1(1+e^x \operatorname{ch}1)} = \frac{1}{4\operatorname{sh}1} \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{\operatorname{ch}1}{1+e^x \operatorname{ch}1} \right) dx \\
&= -\frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh}1} - \frac{\operatorname{ch}1}{4\operatorname{sh}1} \int \left(1 - \frac{e^x \operatorname{ch}1}{1+e^x \operatorname{ch}1} \right) dx = -\frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh}1} - \frac{\operatorname{coth}1}{4} [x - \ln(1+e^x \operatorname{ch}1)] + C.
\end{aligned}$$

【2164】 $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1} dx.$

解 $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1} dx = \int \frac{\operatorname{th}^2 x + 1}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}} dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{2\operatorname{ch}^2 x - 1}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}} d(\operatorname{th}x) = 2 \int \frac{\operatorname{ch}^2 x d(\operatorname{th}x)}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}} - \int \frac{d(\operatorname{th}x)}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}} \\
&= 2 \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}} - \ln(\operatorname{th}x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) = 2 \int \frac{\operatorname{ch}x dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}} - \ln(\operatorname{th}x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) \\
&= \sqrt{2} \int \frac{d(\sqrt{2} \operatorname{sh}x)}{\sqrt{1 + 2\operatorname{sh}^2 x}} - \ln(\operatorname{th}x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} \operatorname{sh}x + \sqrt{1 + 2\operatorname{sh}^2 x}) - \ln(\operatorname{th}x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x} + \sqrt{2} \operatorname{th}x}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x} - \sqrt{2} \operatorname{th}x} - \ln(\operatorname{th}x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) + C.
\end{aligned}$$

【2165】 $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx.$

解 $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx = \int \left(\frac{1 + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right) e^x dx = \int \frac{e^x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int e^x \tan \frac{x}{2} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int e^x d\left(\tan \frac{x}{2}\right) + \int \tan \frac{x}{2} d(e^x) = e^x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} d(e^x) + \int \tan \frac{x}{2} d(e^x) = e^x \tan \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

【2166】 $\int |x| dx.$

提示 注意 $|x| = (\operatorname{sgn} x)x$.

解 $\int |x| dx = (\operatorname{sgn} x) \int x dx = (\operatorname{sgn} x) \frac{1}{2} x^2 + C = \frac{x|x|}{2} + C.$

【2167】 $\int x|x|dx.$

解 $\int x|x|dx = (\operatorname{sgn} x) \int x^2 dx = (\operatorname{sgn} x) \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^2|x|}{3} + C.$

【2168】 $\int (x+|x|)^2 dx.$

提示 利用 2167 题的结果.

解 $\int (x+|x|)^2 dx = \int (x^2 + 2x|x| + x^2) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2|x|}{3} + C = \frac{2x^2}{3}(x+|x|) + C.$

*) 利用 2167 题的结果.

【2169】 $\int (|1+x| - |1-x|) dx.$

提示 利用 2166 题的结果.

解 $\int (|1+x| - |1-x|) dx = \int |1+x| d(1+x) + \int |1-x| d(1-x)$
 $= \frac{(1+x)|1+x|}{2} + \frac{(1-x)|1-x|}{2} + C$

*) 利用 2166 题的结果.

【2170】 $\int e^{-|x|} dx.$

解题思路 由于 $e^{-|x|}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故其原函数 $F(x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微, 而且任意两个原函数之间差一常数. 可求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 易知

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + C_1, & x \geq 0, \\ e^x + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 为常数, 并注意 $0 = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} F(x)$. 求得 C_1, C_2 后即获解.

解 当 $x \geq 0$ 时, $\int e^{-|x|} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_1,$

当 $x < 0$ 时, $\int e^{-|x|} dx = \int e^x dx = e^x + C_2.$

由于 $e^{-|x|}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故其原函数 $F(x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微, 而且任意两个原函数之间差一常数. 今求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知, 必有

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + C_1, & x \geq 0, \\ e^x + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 是两个常数. 由于 $0 = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} F(x)$, 即 $0 = -1 + C_1 = 1 + C_2$, 因此, $C_1 = 1, C_2 = -1$. 从而,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0, \\ e^x - 1, & x < 0. \end{cases}$$

所以,

$$\int e^{-|x|} dx = \begin{cases} 1 - e^{-x} + C, & x \geq 0, \\ e^x - 1 + C, & x < 0. \end{cases}$$

【2171】 $\int \max(1, x^2) dx.$

提示 仿 2170 题, 可求满足 $F(1)=1$ 的原函数 $F(x)$.

解 仿 2170 题,

当 $|x| \leq 1$ 时, $\int \max(1, x^2) dx = \int dx = x + C_1;$

当 $x > 1$ 时, $\int \max(1, x^2) dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2;$

$$\text{当 } x < -1 \text{ 时, } \int \max(1, x^2) dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C_3.$$

今求满足 $F(1)=1$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知, 必有

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & x > 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3, & x < -1, \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, C_3 是三个常数. 由于 $1 = F(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} F(x)$, 即 $1 = 1 + C_1 = \frac{1}{3} + C_2$, 故 $C_1 = 0, C_2 = \frac{2}{3}$. 再由

$F(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-0} F(x)$, 得 $-1 = -\frac{1}{3} + C_3$, 故 $C_3 = -\frac{2}{3}$. 由此可知, 有

$$F(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}, & x > 1, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}, & x < -1. \end{cases}$$

最后得

$$\int \max(1, x^2) dx = \begin{cases} x + C, & |x| \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

【2172】 $\int \varphi(x) dx$, 其中 $\varphi(x)$ 为数 x 至其最接近的整数之距离.

提示 仿 2170 题, 可求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$.

解 显然 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故其原函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微. 今求满足 $F(0)=0$ 的原函数. 由于

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - n, & n \leq x < n + \frac{1}{2}, \\ -x + n + 1, & n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1, \end{cases}$$

故

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - nx + C_n, & n \leq x < n + \frac{1}{2}, \\ -\frac{x^2}{2} + (n+1)x + C'_n, & n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1, \end{cases}$$

其中 C_n, C'_n 是两个常数. 由 $\lim_{x \rightarrow (n+\frac{1}{2})-0} F(x) = F(n+\frac{1}{2})$ 得, $C'_n = C_n - (n+\frac{1}{2})^2$. 故

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - nx + C_n, & n \leq x < n + \frac{1}{2}, \\ -\frac{x^2}{2} + (n+1)x - (n+\frac{1}{2})^2 + C_n, & n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1. \end{cases}$$

由 $\lim_{x \rightarrow (n+1)-0} F(x) = F(n+1)$ 得递推公式 $C_{n+1} = C_n + n + \frac{3}{4}$.

显然 $0 = F(0) = C_0$. 由此得 $C_n = \frac{1}{4}n(2n+1)$. 于是,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - nx + \frac{1}{4}n(2n+1) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\left(x-n-\frac{1}{2}\right)\left[1+2\left(\frac{1}{2}-x-n\right)\right], & n \leq x < n+\frac{1}{2}, \\ -\frac{x^2}{2} + (n+1)x - \frac{1}{4}(2n+1)(n+1) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\left(x-n-\frac{1}{2}\right)\left[1-2\left(x-n-\frac{1}{2}\right)\right], & n+\frac{1}{2} \leq x < n+1. \end{cases}$$

记 $\{x\} = x - [x]$ 表数 x 去掉其整数部分 $[x]$ 后所剩下的零头部分, 那么最后得

$$F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\left[\{x\} - \frac{1}{2}\right]\left\{1 - 2\left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|\right\} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

故
$$\int \varphi(x) dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\left[\{x\} - \frac{1}{2}\right]\left\{1 - 2\left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|\right\} + C \quad (-\infty < x < +\infty).$$

【2173】 $\int [x] |\sin \pi x| dx \quad (x \geq 0).$

解 分别求出在区间 $[0, 1), [1, 2), [2, 3), \dots, [x], x]$ 上满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$ 的增量如下:

在 $[0, 1)$ 上, $\int 0 \cdot \sin \pi x dx = C_1, F(1) - F(0) = 0;$

在 $[1, 2)$ 上, $-\int \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi} \cos \pi x + C_2, F(2) - F(1) = \frac{2}{\pi};$

在 $[2, 3)$ 上, $2 \int \sin \pi x dx = -\frac{2}{\pi} \cos \pi x + C_3, F(3) - F(2) = \frac{2 \cdot 2}{\pi}, \dots$

在 $[x], x]$ 上, $(-1)^{[x]} [x] \int \sin \pi x dx = (-1)^{[x]} [x] \left(-\frac{1}{\pi}\right) \cos \pi x + C_{[x]+1},$

$$F(x) - F([x]) = \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x).$$

从而, 对于 $x \geq 0$, 得到

$$\begin{aligned} \int [x] |\sin \pi x| dx &= F(x) + C \\ &= [F(1) - F(0)] + [F(2) - F(1)] + [F(3) - F(2)] + \dots + \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x) + C \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2 \cdot 2}{\pi} + \dots + \frac{2([x]-1)}{\pi} + \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x) + C \\ &= \frac{[x]([x]-1)}{\pi} + \frac{(-1)^{[x]} [x] (-1)^{[x]}}{\pi} - \frac{(-1)^{[x]} [x] \cos \pi x}{\pi} + C \\ &= \frac{[x]}{\pi} ([x] - (-1)^{[x]} \cos \pi x) + C. \end{aligned}$$

【2174】 $\int f(x) dx$ 其中 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| \leq 1, \\ 1-|x|, & |x| > 1. \end{cases}$

解 当 $|x| \leq 1$ 时, $\int f(x) dx = \int (1-x^2) dx = x - \frac{x^3}{3} + C_1;$

当 $x > 1$ 时, $\int f(x) dx = \int (1-|x|) dx = x - \frac{x|x|}{2} + C_2;$

当 $x < -1$ 时, $\int f(x) dx = \int (1-|x|) dx = x - \frac{x|x|}{2} + C_3.$

今求满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$. 利用 $F(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 1+0} F(x) = F(1), \lim_{x \rightarrow -1-0} F(x) = F(-1)$, 仿 2171

题, 可得

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3}, & |x| \leq 1, \\ x - \frac{x|x|}{2} + \frac{1}{6}, & x > 1, \\ x - \frac{x|x|}{2} - \frac{1}{6}, & x < -1. \end{cases}$$

于是,

$$\int f(x) dx = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + C, & |x| \leq 1, \\ x - \frac{x|x|}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{sgn} x + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

【2175】 $\int f(x) dx$, 式中 $f(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$

解 当 $-\infty < x < 0$ 时, $\int f(x) dx = \int dx = x + C_1$;

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\int f(x) dx = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C_2$;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $\int f(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C_3$.

今求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 利用 $F(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} F(x) = F(0)$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} F(x) = F(1)$, 仿 2171 题,

可得

$$F(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 0, \\ \frac{x^2}{2} + x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + \frac{1}{2}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

于是,

$$\int f(x) dx = \begin{cases} x + C, & -\infty < x < 0, \\ \frac{x^2}{2} + x + C, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + \frac{1}{2} + C, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

【2176】 求 $\int x f''(x) dx$.

解* $\int x f''(x) dx = \int x d[f'(x)] = x f'(x) - \int f'(x) dx = x f'(x) - f(x) + C$.

【2177】 求 $\int f'(2x) dx$.

解* $\int f'(2x) dx = \frac{1}{2} \int f'(2x) d(2x) = \frac{1}{2} f(2x) + C$.

*) 这里暗中分别假定了被积函数 f' , f 是连续的.

【2178】 设 $f'(x^2) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$), 求 $f(x)$.

解 由 $f'(x^2) = \frac{1}{x}$, 得 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$), 于是,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

【2179】⁺ 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 求 $f(x)$.

解 由 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 得 $f'(x) = 1 - x$. 于是,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (1 - x) dx = x - \frac{1}{2}x^2 + C \quad (|x| \leq 1).$$

【2180】 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ x, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$ 且 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$.

提示 令 $\ln x = t$.

解 设 $t = \ln x$, 则 $f'(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \leq 0, \\ e^t, & 0 < t < +\infty. \end{cases}$ 于是,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \begin{cases} x + C_1, & -\infty < x \leq 0, \\ e^x + C_2, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 是两个常数. 由假定 $f(0) = 0$, 得 $C_1 = 0$. 再由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性知, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 由此

得 $C_2 = -1$. 于是,

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x \leq 0, \\ e^x - 1, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

第四章 定 积 分

§ 1. 定积分是积分和的极限

1° 黎曼积分 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 则数

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i) \quad (1)$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分*.

极限(1)存在的充分必要条件为:

$$\text{下积分和 } S = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad \text{及} \quad \text{上积分和 } \bar{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

当 $|\Delta x_i| \rightarrow 0$ 时有共同的极限, 其中

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \quad \text{及} \quad M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

若等式(1)右端的极限存在, 则函数 $f(x)$ 称为相应区间上的可积函数(常义的), 例如: (i) 连续函数; (ii) 具有有限个不连续点的有界函数; (iii) 单调有界的函数, 这些都是任意有限闭区间上的可积函数. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上无界, 则它在 $[a, b]$ 上不可积(常义的).

2° 可积条件 函数 $f(x)$ 在已知闭区间 $[a, b]$ 上可积的充分必要条件为成立等式

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

式中 ω_i 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅.

【2181】 把区间 $[-1, 4]$ 分为 n 个相等的子区间, 并取这些子区间中点的坐标作自变量 ξ_i 的值 ($i=0, 1, \cdots, n-1$). 求函数 $f(x)=1+x$ 在此区间上的积分和 S_n .

解 每个子区间长为 $\frac{5}{n}$, 第 i 个子区间为 $(-1 + \frac{5i}{n}, -1 + \frac{5i}{n} + \frac{5}{n})$, 其中点 $\xi_i = -1 + (i + \frac{1}{2}) \frac{5}{n}$.

于是, 所求的积分和为

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ 1 + \left[-1 + \left(i + \frac{1}{2} \right) \frac{5}{n} \right] \right\} \frac{5}{n} = \frac{25}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(i + \frac{1}{2} \right) = 12 \frac{1}{2}.$$

【2182】 把所给区间分为 n 个相等的子区间, 求下列函数 $f(x)$ 在相应区间上的下积分和 \underline{S}_n 及上积分和 \bar{S}_n :

(1) $f(x)=x^3$ ($-2 \leq x \leq 3$); (2) $f(x)=\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$); (3) $f(x)=2^x$ ($0 \leq x \leq 10$).

解 (1) 把区间 $[-2, 3]$ n 等分, 则每一个子区间的长为 $h = \frac{5}{n}$, 且第 i 个子区间为 $[-2 + ih, -2 + (i+1)h]$ ($i=0, 1, \cdots, n-1$). 若令 m_i 及 M_i 分别表示函数 $f(x)$ 在第 i 个子区间上的下确界及上确界, 则因 $f(x)=x^3$ 为增函数, 所以,

$$m_i = (-2 + ih)^3, \quad M_i = [-2 + (i+1)h]^3 \quad (i=0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

于是, $\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (-2 + ih)^3 h$

* 这里的和 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ 称为积分和.

$$\begin{aligned}
&= -8nh + 12h^2 \sum_{i=0}^{n-1} i - 6h^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + h^4 \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \\
&= -40 + \frac{12 \cdot 25n(n-1)}{2n^2} - \frac{125(2n^3 - 3n^2 + n)}{n^3} + \frac{625(n^4 - 2n^3 + n^2)}{4n^4} = \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2};
\end{aligned}$$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [-2 + (i+1)h]^3 = \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

$$(2) \quad h = \frac{1}{n}, \quad m_i = \sqrt{\frac{i}{n}}, \quad M_i = \sqrt{\frac{i+1}{n}} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

$$\text{于是,} \quad \underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n}}, \quad \overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i+1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}.$$

$$(3) \quad h = \frac{10}{n}, \quad m_i = 2^{\frac{i}{n}}, \quad M_i = 2^{(\frac{i+1}{n})} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

$$\text{于是,} \quad \underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} h 2^{\frac{i}{n}} = \frac{h(2^{\frac{n}{n}} - 1)}{2^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}; \quad \overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} h 2^{(\frac{i+1}{n})} = \frac{h 2^{\frac{1}{n}} (2^{\frac{n}{n}} - 1)}{2^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{10230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}.$$

【2183】 把闭区间 $[1, 2]$ 分为 n 份,使这分点的横坐标构成一等比数列 * ,求函数 $f(x) = x^4$ 在 $[1, 2]$ 上的下积分和.当 $n \rightarrow \infty$ 时此和的极限等于什么?

解 设 $\sqrt[n]{2} = q$ 或 $2 = q^n$,分点为 $1 = q^0 < q^1 < q^2 < \dots < q^n = 2$.由于 $f(x) = x^4$ 在 $[1, 2]$ 上为增函数,故下积分和为

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [(q^i)^4 (q^{i+1} - q^i)] = (q-1) \sum_{i=0}^{n-1} (q^i)^5 = \frac{(q-1)(q^{5n} - 1)}{q^5 - 1} = \frac{31(\sqrt[n]{2} - 1)}{\sqrt[n]{32} - 1},$$

$$\text{且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n = 31 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{32} - 1} = 31 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{16} + \sqrt[n]{8} + \sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{2} + 1} = \frac{31}{5}.$$

*) 原题“使这 n 份的长构成等比数列”,现根据原题答案予以改正.

【2184】⁺ 从积分的定义出发,求 $\int_0^T (v_0 + gt) dt$,其中 T, v_0, g 为常数.

解 $f(t) = v_0 + gt$ 在 $[0, T]$ 上为增函数($T > 0$).

$$h = \frac{T}{n}, \quad m_i = v_0 + igh, \quad M_i = v_0 + (i+1)gh \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\text{于是,} \quad \underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} (v_0 + igh)h = nv_0 h + gh^2 \sum_{i=0}^{n-1} i = v_0 T + \frac{gT^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = v_0 T + \frac{gT^2}{2} - \frac{gT^2}{2n},$$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} [v_0 + (i+1)gh]h = v_0 T + \frac{gT^2}{2} + \frac{gT^2}{2n}.$$

$$\text{因为} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n = v_0 T + \frac{gT^2}{2},$$

$$\text{所以,} \quad \int_0^T (v_0 + gt) dt = v_0 T + \frac{gT^2}{2}.$$

以适当的方法分割积分区间,并视积分为相应积分和的极限,计算下列定积分:

$$\text{【2185】} \quad \int_{-1}^2 x^2 dx.$$

解题思路 由于 $f(x) = x^2$ 在 $[-1, 2]$ 上连续,故所给的定积分存在,且它与分法无关,同时也与点 ξ_i 的取法无关.本题将 $[-1, 2]$ n 等分,得子区间的长 $h = \frac{3}{n}$,并取点 $\xi_i = -1 + ih$ ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$),这种和的极限就是所求的定积分.以下各题如无特殊情况,不再说明定积分的存在性,直接对区间分段并取点 ξ_i ,作和求极限.

解 将区间 $[-1, 2]$ n 等分,得 $h = \frac{3}{n}$.取 $\xi_i = -1 + ih$ ($i=0, 1, \dots, n-1$).

作和
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1+ih)^2 h = nh - 2h^2 \sum_{i=0}^{n-1} i + h^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = 3 + \frac{9-9n}{2n^2}.$$

于是,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3.$$

由于 $f(x)=x^2$ 在 $[-1,2]$ 上连续, 故积分 $\int_{-1}^2 x^2 dx$ 是存在的, 且它与分法无关, 同时也与点的取法无关. 因此, 上述和的极限就是所求的积分值, 即定积分

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = 3.$$

【2186】 $\int_0^1 a^x dx \quad (a>0).$

提示 当 $a \neq 1$ 时, 将 $[0,1]$ n 等分, 得 $h = \frac{1}{n}$, 并取点 $\xi_i = ih \ (i=0,1,2,\dots,n-1)$. 同时利用 541 题的结果. 当 $a=1$ 时, 定积分显然为 1.

解 当 $a \neq 1$ 时, 将区间 $[0,1]$ n 等分, 得 $h = \frac{1}{n}$. 取 $\xi_i = ih \ (i=0,1,\dots,n-1)$.

作和
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h a^{\xi_i} = \frac{h(a^n - 1)}{a^h - 1} = \frac{a - 1}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}.$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} = \frac{a-1}{\ln a}, \quad \text{即} \quad \int_0^1 a^x dx = \frac{a-1}{\ln a} \quad (a \neq 1).$$

当 $a=1$ 时, 积分显然为 1.

【2187】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

解 将区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ n 等分, 得 $h = \frac{\pi}{2n}$. 取 $\xi_i = ih \ (i=0,1,\dots,n-1)$.

作和
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h \sin ih.$$

由于
$$\sin ih = \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \left(\cos \frac{2i-1}{2} h - \cos \frac{2i+1}{2} h \right),$$

所以,
$$S_n = \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2i-1}{2} h - \cos \frac{2i+1}{2} h \right) = \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \left(\cos \frac{h}{2} - \cos \frac{2n-1}{2} h \right).$$

最后得到
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4n} - \cos \frac{2n-1}{4n} \pi \right) = 1,$$

即
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

【2188】 $\int_0^x \cos t dt.$

解 将区间 $[0, x]$ n 等分, 得 $h = \frac{x}{n}$. 取 $\xi_i = ih \ (i=0,1,\dots,n-1)$. 与 2187 题类似, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} h \cos ih = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \left(\sin \frac{h}{2} + \sin \frac{2n-1}{2} h \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left[\sin \frac{x}{2n} + \sin \frac{(2n-1)x}{2n} \right] = \sin x,$$

即
$$\int_0^x \cos t dt = \sin x.$$

【2189】 $\int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b).$

提示 将 $[a, b]$ n 等分, 设分点为 $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 并取 $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$).

解 将区间 $[a, b]$ n 等分, 设分点为

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

取 $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \cdots, n-1$), 显然 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. 作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_i x_{i+1}} (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

于是, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$

即 $\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$

【2190】 $\int_a^b x^m dx \quad (0 < a < b; m \neq -1).$

提示 选择诸分点, 使它们的横坐标构成一等比数列, 即

$$a < aq < aq^2 < \cdots < aq^i < \cdots < aq^{n-1} < aq^n = b,$$

其中 $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, 并取 $\xi_i = aq^i$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$).

解 选择诸分点, 使它们的横坐标构成一等比数列, 即

$$a < aq < aq^2 < \cdots < aq^i < \cdots < aq^{n-1} < aq^n = b, \quad \text{其中 } q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

取 $\xi_i = aq^i$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$), 作和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^m (aq^{i+1} - aq^i) = a^{m+1} (q-1) \sum_{i=0}^{n-1} q^{(m+1)i} = a^{m+1} (q-1) \frac{q^{n(m+1)} - 1}{q^{m+1} - 1} \\ &= (b^{m+1} - a^{m+1}) \frac{q-1}{q^{m+1} - 1}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q = 1$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q-1}{q^{m+1} - 1} = (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^m + q^{m-1} + \cdots + 1} = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

即 $\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$

【2191】 $\int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b).$

解 同 2190 题的区间分法及点 ξ_i 取法, 得和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^{-1} (aq^{i+1} - aq^i) = n(q-1) = n \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right).$$

由于 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a$ ($a > 0$) (可用洛必达法则),

命 $\alpha = \frac{b}{a}$, 而 $\frac{1}{n}$ 是趋于 0 的变量, 应用这一极限即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right) = \ln \frac{b}{a},$$

即 $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}.$

【2192】 计算泊松积分 $\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$. 考虑两种情形: (1) $|a| < 1$; (2) $|a| > 1$.

提示 分解多项式 $a^{2n} - 1$ 为二次因式.

解 因为 $(1-|a|)^2 \leq 1-2a\cos x+a^2$, 所以当 $|a| \neq 1$ 时, 被积函数是连续的, 于是, 积分就存在. 把区间 $[0, \pi]$ 分成 n 个相等部分, 即有

$$S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - 2a \cos \frac{i\pi}{n} + a^2 \right) = \frac{\pi}{n} \ln \left[(1+a)^2 \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - 2a \cos \frac{i\pi}{n} + a^2 \right) \right].$$

另一方面, 我们可以证明 $t^{2n} - 1 = (t^2 - 1) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - 2t \cos \frac{i\pi}{n} + t^2 \right)$.

事实上, 方程 $t^{2n} - 1 = 0$ 共有 $2n$ 个根, 记作

$$1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n = -1, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \dots, \bar{\varepsilon}_{n-1},$$

其中

$$\varepsilon_i = \cos \frac{i\pi}{n} + i \sin \frac{i\pi}{n}$$

及

$$\bar{\varepsilon}_i = \cos \frac{i\pi}{n} - i \sin \frac{i\pi}{n} \quad (i^2 = -1),$$

于是, $t^{2n} - 1 = (t+1)(t-1) \prod_{i=1}^{n-1} (t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i)$

$$= (t^2 - 1) \prod_{i=1}^{n-1} \left(t - \cos \frac{i\pi}{n} - i \sin \frac{i\pi}{n} \right) \left(t - \cos \frac{i\pi}{n} + i \sin \frac{i\pi}{n} \right) = (t^2 - 1) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - 2t \cos \frac{i\pi}{n} + t^2 \right).$$

当 $t=a$ 时, 利用上式就可把 S_n 表成下面的形式

$$S_n = \frac{\pi}{n} \ln \left[\frac{a+1}{a-1} (a^{2n} - 1) \right].$$

于是, (1) 当 $|a| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$, 即 $\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2) dx = 0$.

(2) 当 $|a| > 1$ 时, 把 S_n 改写成 $S_n = 2\pi \ln|a| + \frac{\pi}{n} \ln \left[\frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}} \right]$ 后, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}} = 1$, 从而, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2\pi \ln|a|$, 即 $\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2) dx = 2\pi \ln|a|$.

【2193】 设函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx.$$

其中

$$x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, x_i \leq \theta_i \leq x_{i+1} \quad (i=0, 1, \dots, n-1),$$

且

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (x_0 = a, x_n = b).$$

证 因为 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续, 所以, 它们的乘积 $f(x)\varphi(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续. 因此, 积分

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

存在. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故有界, 即存在常数 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$ ($a \leq x \leq b$); 又由于 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故一致连续, 因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $\max |\Delta x_i| < \delta$ 时, 恒有

$$|\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

从而,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) \varphi(\theta_i) - f(\xi_i) \varphi(\xi_i)] \Delta x_i \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \cdot |\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)| \cdot |\Delta x_i| \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} M \frac{\varepsilon}{M(b-a)} |\Delta x_i| = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) \varphi(\theta_i) - f(\xi_i) \varphi(\xi_i)] \Delta x_i = 0. \quad (2)$$

由(1)式和(2)式, 最后得到 $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i$.

【2194】 证明: 不连续函数 $f(x) = \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可积.

证 首先注意, 函数 $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 其不连续点是

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

并且, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的任何部分区间上的振幅 $\omega \leq 2$.

任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\varepsilon}{5}, 1\right]$ 上只有有限个不连续点, 故可积. 因此, 存在 $\eta > 0$, 使得对 $\left[\frac{\varepsilon}{5}, 1\right]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x'_i| < \eta$, 就有 $\sum \omega'_i \Delta x'_i < \frac{\varepsilon}{5}$. 显然, 若 $[\alpha, \beta] \subset \left[\frac{\varepsilon}{5}, 1\right]$, 则对于 $[\alpha, \beta]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x'_i| < \eta$, 也有 $\sum \omega'_i \Delta x'_i < \frac{\varepsilon}{5}$.

令 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{5}, \eta\right\}$. 现设 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = 1$ 是 $[0, 1]$ 的满足 $\max |\Delta x_i| < \delta$ 的任一分法, 设 $x_{i_0} \leq \frac{\varepsilon}{5} < x_{i_0+1}$.

由上述, 有 $\sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{5}$. 又显然有

$$\sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i \leq 2 \sum_{i=0}^{i_0} \Delta x_i < 2 \frac{2\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5}.$$

故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

于是, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积.

【2195】 证明: 黎曼函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \quad (m \text{ 及 } n (n \geq 1) \text{ 为互素的整数}) \end{cases}$$

在任何有限区间上可积分

证 为简单起见, 我们只考虑闭区间 $[0, 1]$ (对于一般的有限闭区间 $[a, b]$, 可类似地讨论之).

命 $\lambda > 0$ 将区间 $[0, 1]$ 分成长度 $\Delta x_i < \lambda$ 的若干部分区间, 取任意的正整数 N , 将所有的部分区间分成两类: 把包含分母 $n \leq N$ 的数 $\frac{m}{n}$ 的区间列入第一类, 而把不包含上述数的那些区间列入第二类. 对于第一类, 由于满足条件 $n \leq N$ 的数 $\frac{m}{n}$ 只有有限个, 个数记为 $k = k_N$, 所以, 第一类区间的个数就不大于 $2k$, 而它们长度的总和不出 $2k\lambda$; 对于第二类, 由于在这些区间内除含无理数外, 仅能含 $n > N$ 的有理数 $\frac{m}{n}$, 而在这种有理点上, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$, 所以, 振幅 ω_i 小于 $\frac{1}{N}$.

这样一来, 和数 $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ 就分成两部分, 分别估计它们的值, 即得

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < 2k_N \lambda + \frac{1}{N}.$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取定一个 $N > \frac{2}{\varepsilon}$, 然后取 $\delta = \frac{\varepsilon}{4k_N}$. 于是, 当 $\lambda < \delta$ 时, 必有

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

故

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

所以,函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积.

【2196】 证明:函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} \right], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可积.

证 首先注意,函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界,其不连续点是

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

并且, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的任何部分区间上的振幅 $\omega \leq 1$.

任给 $\epsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在 $[\frac{\epsilon}{3}, 1]$ 上只有有限个不连续点,故可积. 因此,存在 $\eta > 0$, 使得对 $[\frac{\epsilon}{3}, 1]$ 的任何分法,只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 就有 $\sum \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{3}$. 显然,若 $[\alpha, \beta] \subset [\frac{\epsilon}{3}, 1]$, 则对于 $[\alpha, \beta]$ 的任何分法,只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 也有 $\sum \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{3}$.

令 $\delta = \min(\frac{\epsilon}{3}, \eta)$. 现设 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = 1$ 是 $[0,1]$ 的满足 $\max |\Delta x_i| < \delta$ 的任一

分法. 设 $x_{i_0} \leq \frac{\epsilon}{3} < x_{i_0+1}$. 由上述,有

$$\sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{3}.$$

又显然有

$$\sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{i_0} \Delta x_i < \frac{2\epsilon}{3}.$$

故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \epsilon.$$

于是,

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

由此可知, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积.

【2197】 证明:狄利克雷函数 $\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数}, \\ 1, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$ 在任意区间上不可积.

提示 注意 $\omega_i = 1$.

证 在任意区间 $[a,b]$ 的任何部分区间上均有 $\omega_i = 1$, 所以, $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = b-a$, 它不趋于零. 因此, 函数 $\chi(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

【2198】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$f_n(x) = \sup f(x) \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}),$$

其中

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad (i=0,1,\dots,n-1; n=1,2,\dots).$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

证明思路 注意 $f_n(x)$ 是不超过 $(n+1)$ 个不连续点的阶梯函数, 因此, 它在 $[a,b]$ 上可积. 于是, 有

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx,$$

从而, 命题易获证.

证 $f_n(x)$ 是不超过 $n+1$ 个不连续点的阶梯函数, 因此, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 于是,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_i dx = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \max |\Delta x_i| = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0 \text{ 时}), \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

【2199】 证明:若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,则存在连续函数 $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 的序列,使得在 $a \leq c \leq b$ 时

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx.$$

证 将区间 $[a, b]$ n 等分,设分点为

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b,$$

即

$$x_i^{(n)} = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

在 $\Delta x_i^{(n)} = [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上令 $\varphi_n(x)$ 为过点 $[x_{i-1}^{(n)}, f(x_{i-1}^{(n)})]$ 及 $[x_i^{(n)}, f(x_i^{(n)})]$ 的直线,即当 $x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 时,令

$$\varphi_n(x) = f(x_{i-1}^{(n)}) + \frac{x - x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}} [f(x_i^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)})],$$

则 $\varphi_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数,因此,它是可积的.

若令 $m_i^{(n)}, M_i^{(n)}$ 及 $\omega_i^{(n)}$ 分别表示函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上的下确界,上确界及振幅,则当 $x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 时,

$$m_i^{(n)} \leq \varphi_n(x) \leq M_i^{(n)}, \quad m_i^{(n)} \leq f(x) \leq M_i^{(n)},$$

从而,

$$|\varphi_n(x) - f(x)| \leq \omega_i^{(n)}.$$

于是,当 $a \leq c \leq b$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^c f(x) dx - \int_a^c \varphi_n(x) dx \right| &\leq \int_a^c |f(x) - \varphi_n(x)| dx \leq \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}} |f(x) - \varphi_n(x)| dx \leq \sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)}. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,因此,当 $\max |\Delta x_i^{(n)}| = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ 时,必有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)} \rightarrow 0.$$

由此可知 $\int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx \quad (a \leq c \leq b).$

【2200】 证明:若有界的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积,则其绝对值 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上也可积,并且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

证明思路 设 x' 及 x'' 为区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的任意两点,则由

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$$

可知,函数 $|f(x)|$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅 ω_i^* 不超过 $f(x)$ 在该区间上的振幅 ω_i ,因而,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^* \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0,$$

即函数 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积.

其次,由 $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$,命题易获证.

证 对于区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任意两点 x' 及 x'' ,总有

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|,$$

所以,函数 $|f(x)|$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅 ω_i^* 不超过 $f(x)$ 在此区间上的振幅 ω_i ,因而,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^* \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0,$$

即 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积.

其次,因为 $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$,所以,

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

即

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

【2201】 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上绝对可积, 即积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 存在. 这个函数在 $[a, b]$ 上是否为可积函数?

提示 不一定可积. 例如, 函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -1, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$

解 一般地说, 不. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -1, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

$|f(x)| = 1$, 它在 $[a, b]$ 上连续, 因此, 它在 $[a, b]$ 上可积. 但对于函数 $f(x)$ 而言, 在 $[a, b]$ 的任一部分区间上 $\omega_i = 2$, 所以,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 2(b-a),$$

它不趋向于零. 于是, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积.

【2202】 设函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[A, B]$ 上有定义并连续, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 并且当 $a \leq x \leq b$ 时 $A \leq f(x) \leq B$. 证明: 函数 $\varphi[f(x)]$ 在 $[a, b]$ 上可积.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 根据函数 $\varphi(x)$ 在 $[A, B]$ 的一致连续性, 存在 $\eta > 0$, 使得在 $[A, B]$ 中长度小于 η 的任一闭区间上, 函数 φ 的振幅都小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 用 Ω 表 $\varphi(x)$ 在 $[A, B]$ 上的振幅. 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的可积性知, 必有 $\delta > 0$ 存在, 使对 $[a, b]$ 的任一分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \delta$, 就有 $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\eta \varepsilon}{2\Omega}$. ($\omega_i(f)$ 表 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅).

下证对 $[a, b]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \delta$, 就有

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\varphi(f)) \Delta x_i < \varepsilon.$$

事实上, 将诸区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 分成两组, 第一组是满足 $\omega_i(f) < \eta$ 的 (其下标以 “ i' ” 记之), 第二组是满足 $\omega_i(f) \geq \eta$ 的 (下标以 “ i'' ” 记之). 于是,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\varphi(f)) \Delta x_i = \sum_{i'} \omega_{i'}(\varphi(f)) \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''}(\varphi(f)) \Delta x_{i''} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i'} \Delta x_{i'} + \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''},$$

但 $\frac{\eta \varepsilon}{2\Omega} > \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i = \sum_{i'} \omega_{i'}(f) \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''}(f) \Delta x_{i''} \geq \sum_{i''} \omega_{i''}(f) \Delta x_{i''} \geq \eta \sum_{i''} \Delta x_{i''},$

于是, $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\varphi(f)) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) + \Omega \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \varepsilon.$

由此可知, $\varphi[f(x)]$ 在 $[a, b]$ 上可积.

【2203】 若函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 可积, 则函数 $f[\varphi(x)]$ 是否也必定可积?

解题思路 不一定可积. 例如, 函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$ $\varphi(x)$ 为黎曼函数 (参阅 2195 题). 并利用 2197 题的结果.

解 不一定可积. 例如, 函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ 1, & x \neq 0, \end{cases}$ 及 $\varphi(x)$ 为黎曼函数 (参阅 2195 题). 它们在任何有限

区间上均可积 (前者不连续点仅为原点一个, 且是有界函数, 因而是可积分的).

但 $f[\varphi(x)] = \chi(x)$, 利用 2197 题的结果得知, 它在任何有限区间上不可积.

【2204】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A, B]$ 上可积, 证明: 函数 $f(x)$ 有积分连续性, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0,$$

其中 $[a, b] \subset [A, B]$.

证 证法 1:

不妨设 $A < a, b < B$. 由于 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 可积, 故对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使对 $[A, B]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 就恒有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \epsilon;$$

显然, 对 $[A, B]$ 的任一子区间 $[A', B']$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 也有

$$\sum_i \omega_i(f) \Delta x_i < \epsilon. \quad (1)$$

今设 $0 < h < \delta = \min \left\{ \frac{\eta}{2}, \frac{B-a}{3} \right\}$, 则对于 h , 存在正整数 $n = n(h)$, 使有 $a + (2n-2)h < b \leq a + 2nh < a +$

$(2n+1)h < B$. 用 ω_i 表 $f(x)$ 在 $[a+ih, a+(i+2)h]$ 上的振幅, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx &\leq \int_a^{a+2nh} |f(x+h) - f(x)| dx = \sum_{i=0}^{2n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \sum_{i=0}^{2n-1} \omega_i h \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i} 2h + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i+1} 2h. \end{aligned}$$

显然, $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i} 2h$ 是对于区间 $[a, a+2nh]$ 的分法 $a < a+2h < a+4h < \dots < a+2nh$ 所作的 (1) 式中的和, 而

$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i+1} 2h$ 是对于区间 $[a+h, a+(2n+1)h]$ 的分法 $a+h < a+3h < a+5h < \dots < a+(2n+1)h$ 所作的 (1) 式中的和. 故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i} 2h < \epsilon, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i+1} 2h < \epsilon.$$

从而,

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

由此可知

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

同理可证

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

于是,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

证法 2:

由 2199 题的结果可知: 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 由于 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 上可积, 故存在 $[A, B]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$, 使

$$\int_A^B |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\epsilon}{4}.$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $[A, B]$ 上一致连续, 故存在 $\delta > 0$, 使当 $|x' - x''| < \delta$ ($x' \in [A, B], x'' \in [A, B]$) 时, 恒有

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

于是, 当 $|h| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx &\leq \int_a^b |f(x+h) - \varphi(x+h)| dx + \int_a^b |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx + \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \\ &\leq 2 \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \int_a^b |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx < 2 \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} (b-a) = \epsilon. \end{aligned}$$

故

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

【2205】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 证明: 等式

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

当且仅当对属于闭区间 $[a, b]$ 内函数 $f(x)$ 连续的一切点有 $f(x) = 0$ 时方成立.

证 先证必要性:

采用反证法. 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 但 $f(x_0) \neq 0$, 则存在 $\delta > 0$, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$, 使当 $|x - x_0| \leq \delta$ 时

$$|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

从而,
$$\int_a^b f^2(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x) dx > \frac{f^2(x_0)}{2} \cdot 2\delta = \frac{\delta f^2(x_0)}{2} > 0.$$

这与假设 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ 矛盾.

再证充分性:

也即要证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积条件下, 假设 $f(x)$ 在一切连续点 x_0 上均有 $f(x_0) = 0$, 则必有

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0.$$

证明分两个部分. 第一, 首先要指出当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积时, $f(x)$ 的连续点在 $[a, b]$ 中必定是稠密的. 此处所谓“稠密”性是指: 对于任意区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 总存在一点 $x_0 \in [\alpha, \beta]$, 使 $f(x)$ 在 x_0 连续. 第二, 利用假设, 并借助于稠密性, 可证得充分性.

现在先证第二部分: 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的全体连续点 X 的稠密性以及当 $x_0 \in X$ 时有 $f(x_0) = 0$ 的假设.

即知, 对于区间 $[a, b]$ 的任一分法, 均可适当地取 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, 使 $f(\xi_i) = 0$. 从而积分和 $\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i) \Delta x_i = 0$.

由此, 再注意到 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 的可积性, 便有

$$\int_a^b f^2(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i) \Delta x_i = 0.$$

如今再补证第一部分, 应当首先指明, 若 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 则对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $[\alpha, \beta]$ 的子区间 $[\alpha', \beta']$, 使得振幅

$$\epsilon(\alpha', \beta') < \epsilon.$$

事实上, 如果上述结论不成立, 则存在一个 $\epsilon_0 > 0$, 使对于 $[\alpha, \beta]$ 的任意分法, 有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i \geq \epsilon_0 \sum_i \Delta x = \epsilon_0 (\beta - \alpha) > 0,$$

这与 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可积矛盾, 因此, 结论为真.

今取 $[\alpha, \beta]$ 为 $[a_1, b_1]$. 由于 $f(x)$ 在 $[a_1 + \frac{b_1 - a_1}{4}, b_1 - \frac{b_1 - a_1}{4}]$ 上可积, 故存在区间 $[a_2, b_2] \subset [a_1 + \frac{b_1 - a_1}{4}, b_1 - \frac{b_1 - a_1}{4}] \subset [a_1, b_1]$, 使 $\omega[a_2, b_2] < \frac{1}{2}$. 同样, 存在区间

$$[a_3, b_3] \subset [a_2 + \frac{b_2 - a_2}{4}, b_2 - \frac{b_2 - a_2}{4}] \subset [a_2, b_2],$$

使 $\omega[a_3, b_3] < \frac{1}{3}$. 这样继续下去, 得一串闭区间 $[a_n, b_n] (n=1, 2, 3, \dots)$, 满足

$$\alpha = a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots < b_n < \dots < b_2 < b_1 = \beta,$$

并且

$$b_n - a_n \leq \frac{\beta - \alpha}{2^{n-1}} \rightarrow 0, \quad \omega[a_n, b_n] < \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

由区间套定理, 诸 $[a_n, b_n]$ 具有唯一的公共点 c . 显然 $a_n < c < b_n (n=1, 2, 3, \dots)$. 下证 $f(x)$ 在点 c 连续.

任给 $\epsilon > 0$, 取正整数 n_0 使 $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. 再取 $\delta > 0$ 使 $(c - \delta, c + \delta) \subset [a_{n_0}, b_{n_0}]$. 于是, 当 $|x - c| < \delta$ 时, 必有

$$|f(x) - f(c)| \leq \omega[a_{n_0}, b_{n_0}] < \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

故 $f(x)$ 在点 $x=c$ 连续. 到此, 充分性证毕.

§ 2. 利用不定积分计算定积分的方法

1° 牛顿—莱布尼茨公式 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且连续, $F(x)$ 为它的原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

当 $f(x) \geq 0$ 时, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$, OX 轴及垂直于 OX 轴的二直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的面积 S (图 4.1).

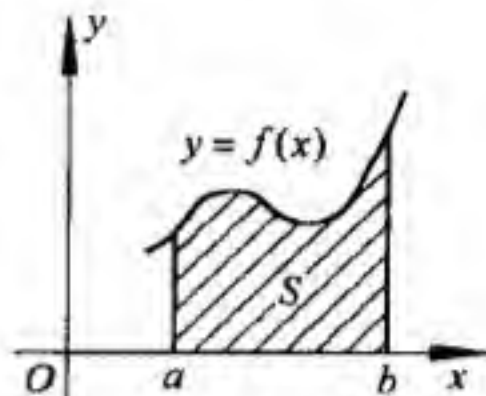


图 4.1

2° 分部积分法 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续并有连续导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ (即 $f(x), g(x) \in C^{(1)}(a, b)$), 则

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx.$$

3° 变量代换 若: (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, (2) 函数 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 皆在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 其中 $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; (3) 复合函数 $f[\varphi(t)]$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上有定义并连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

利用牛顿—莱布尼茨公式, 求下列定积分并绘出对应的曲边图形面积:

【2206】 $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx.$

解 $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_{-1}^8 = 11 \frac{1}{4}$ (图 4.2).

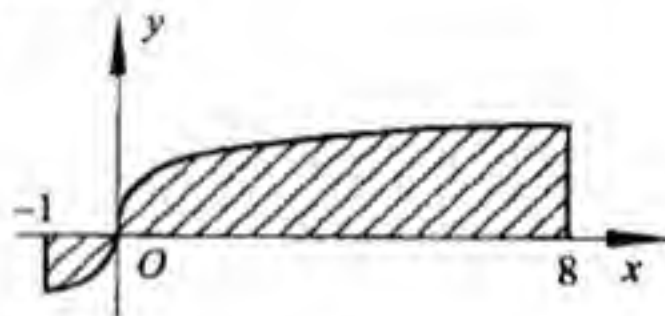


图 4.2

【2207】 $\int_0^{\pi} \sin x dx.$

解 $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$ (图 4.3).

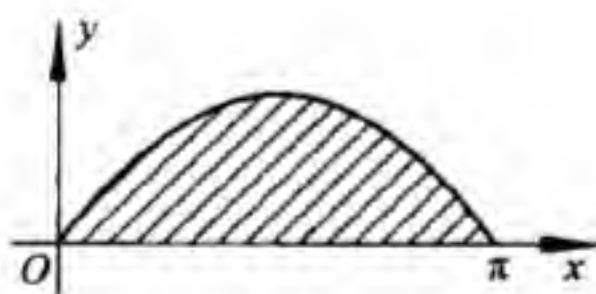


图 4.3

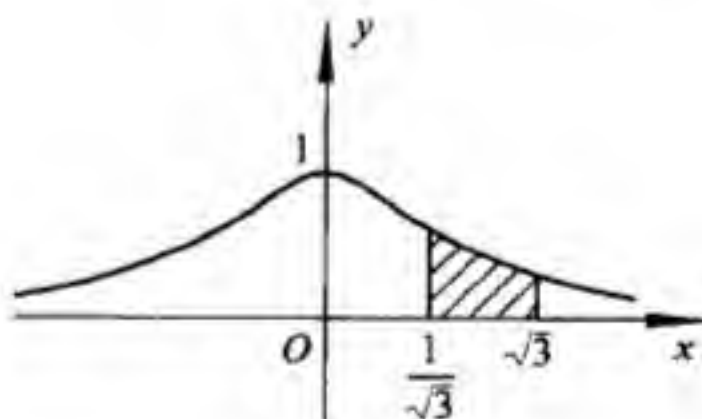


图 4.4

【2208】 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$

解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ (图 4.4).

【2209】 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$ (图 4.5).

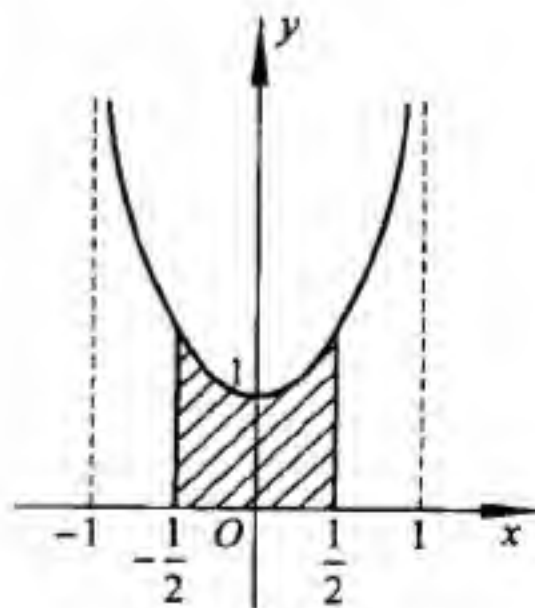


图 4.5

* 本节个别题是收敛的广义积分, 仍按此公式计算。——《题解》作者注。

【2210】 $\int_{\text{sh}1}^{\text{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

解 $\int_{\text{sh}1}^{\text{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_{\text{sh}1}^{\text{sh}2} = \text{arsh}x \Big|_{\text{sh}1}^{\text{sh}2} = 1. \quad (\text{图 4.6}).$

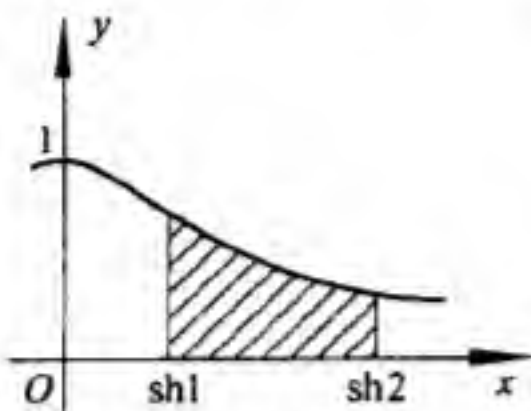


图 4.6

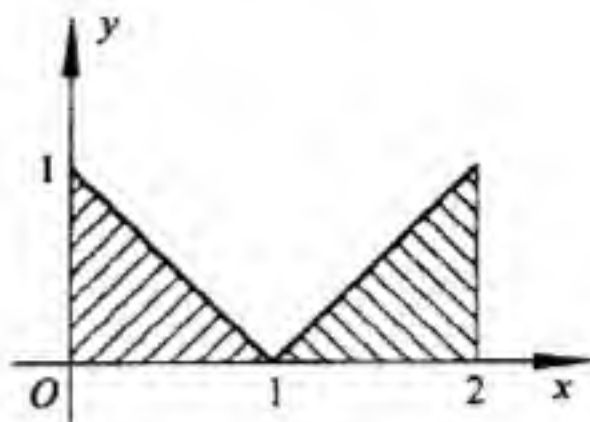


图 4.7

【2211】 $\int_0^2 |1-x| dx,$

解 $\int_0^2 |1-x| dx = \int_0^1 (1-x) dx - \int_1^2 (1-x) dx = 1 \quad (\text{图 4.7}).$

【2212】 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi).$

解 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} = \frac{1}{\sin \alpha} \arctan \frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha} \Big|_{-1}^1$
 $= \frac{1}{\sin \alpha} \left[\arctan \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) + \arctan \left(\cot \frac{\alpha}{2} \right) \right]$
 $= \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ \frac{\alpha}{2} + \arctan \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} = \frac{\pi}{2 \sin \alpha} \quad (\text{图 4.8}).$

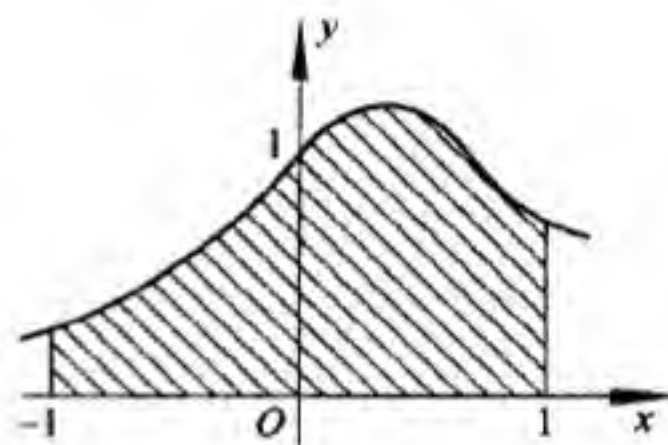


图 4.8

注 以下图形从略.

【2213】 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x} \quad (0 \leq \epsilon < 1).$

解 令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 并记 $a = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}$, 则有

$$\int \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x} = \frac{2}{(1+\epsilon)a} \int \frac{d(at)}{1 + (at)^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan(at \tan \frac{x}{2}) + C,$$

故 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \left[\arctan(at \tan \frac{x}{2}) \Big|_0^{x \rightarrow 0^+} + \arctan(at \tan \frac{x}{2}) \Big|_{x \rightarrow 0^+}^{2\pi} \right] = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}}.$

【2214】 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (|a| < 1, |b| < 1, ab > 0).$

解 在公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln |Ax + \frac{B}{2} + \sqrt{A} \sqrt{Ax^2+Bx+C}| + C^*$$

中, 设 $Ax^2+Bx+C = (1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)$, 两端求导数, 得

$$Ax + \frac{B}{2} = -b(1-2ax+a^2) - a(1-2bx+b^2).$$

由此推得, 当 $x=1$ 时, 在对数符号下的表达式的值为

$$-a(1-b)^2 - b(1-a)^2 + 2\sqrt{ab}(1-a)(1-b) = -(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1+\sqrt{ab})^2,$$

而当 $x=-1$ 时, 得到值 $-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1-\sqrt{ab})^2$. 于是,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

*) 利用 1850 题的结果.

【2215】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0).$

提示 利用 2030 题的结果.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{|ab|} \arctan \left(\frac{|a| \tan x}{|b|} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2|ab|}$

*) 利用 2030 题的结果.

【2216】 对于下列定积分:

(1) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$; (2) $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + \tan^2 x}$; (3) $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx$.

说明为什么运用牛顿—莱布尼茨公式会得到不正确的结果.

解 (1) 若应用公式得

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2 < 0.$$

这是不正确的. 事实上, 由于函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, 所以, 当积分存在时, 其值必大于零. 原因在于该函数在区间 $[-1, 1]$ 上有第二类不连续点 $x=0$. 因而, 不能运用公式.

(2) 若应用公式得

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + \tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

但 $\frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} > 0$, 故积分若存在, 必为正. 原因在于原函数在 $[0, 2\pi]$ 上 $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ 为第一类不连续点, 故不能直接运用公式.

(3) 若应用公式得

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx = \arctan \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} > 0.$$

这是不正确的. 因为 $\frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{1+x^2} < 0$. 所以, 积分值必为负. 原因在于原函数 $\arctan \frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 为第一类不连续点, 故不能直接运用公式.

【2217】 求 $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx$.

解 我们有

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

注意 被积函数 $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right)$ 显然在 $x=0$ 不连续, 但易知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) = 0,$$

故 $x=0$ 是可去不连续点. 若我们补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0, 则被积函数在整个 $[-1, 1]$ 上都是连续的, 从而, 积分 $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx$ 存在. 以后, 凡是被积函数有可去不连续点的情形, 我们都按此法处理, 理解为连续函数的积分, 另外,

$$\int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3}$$

应理解为 $\int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \bigg|_{-1}^{-x} = \frac{1}{3}.$

以后,凡是定积分存在而原函数有不连续点的情况,都按此理解,省去取极限的式子,但应理解为取极限的结果.

【2218】 求 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx.$

提示 在每一个区间 $[(k-1)\pi, k\pi]$ ($k=1, 2, \dots, 100$) 上积分,再相加.

解 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx = \sum_{k=1}^{100} \sqrt{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sqrt{\sin^2 x} dx = \sum_{k=1}^{100} \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x} dx = 100\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = 200\sqrt{2}.$

利用定积分求下列和的极限值:

【2219】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$

解 这是和的极限,该极限即为函数 $f(x)=x$ 在区间 $[0,1]$ 上的定积分.事实上,函数 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上是连续的,因而可积分.这样便可将 $[0,1]$ n 等分,并取 ξ_i 为小区间的左端点,这样作出的和的极限就是题中所要求的极限.于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

以下各题不再说明.

【2220】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$

【2221】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$

【2222】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} \sin \frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$

【2223】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^p \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$

【2224】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right).$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} (2\sqrt{2}-1).$

【2225】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^n \ln i \right) - n \ln n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \int_0^1 \ln x dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} x(\ln x - 1) \bigg|_{\epsilon}^1 = -1, \end{aligned}$$

从而, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

*) 参看后面 2388 题.

$$\text{【2226】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right].$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right] = \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

弃掉高阶无穷小量, 求下列和的极限值:

$$\text{【2227】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \cdots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right].$$

解 由于对一切 $k < n, 3 < n$ 有

$$0 \leq \frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2} \leq \tan \frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2} \leq \tan \frac{k\pi}{n^2} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n^2}\right) \leq \frac{\sin \frac{k\pi}{n^2}}{\cos \frac{k\pi}{n^2}} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n^2}\right) \leq \frac{2k\pi}{n^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right).$$

$$\text{从而, } 0 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{2k\pi}{n^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \leq 2\pi \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

$$\begin{aligned} \text{于是, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{k\pi}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k\pi}{n} + \frac{k^2\pi}{n^2}\right) = \int_0^1 \pi(x+x^2) dx = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{【2228】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}.$$

解 由于 $\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} (1 + \alpha_n)$, 式中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. 于是,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) \\ &= \pi \int_0^1 \frac{dx}{2 + \cos \pi x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\tan \frac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{【2229】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \quad (x > 0).$$

解 由于

$$0 \leq \sqrt{\left(x + \frac{k}{n}\right)\left(x + \frac{k+1}{n}\right)} - \left(x + \frac{k}{n}\right) = \frac{\left(x + \frac{k}{n}\right)\left(x + \frac{k+1}{n}\right) - \left(x + \frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(x + \frac{k}{n}\right)\left(x + \frac{k+1}{n}\right) + \left(x + \frac{k}{n}\right)}} \leq \frac{1}{2x} \left(x + \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n},$$

故

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(x + \frac{k}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{2xn^2} \sum_{k=1}^n \left(x + \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4x} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(x + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 (x+t) dt = x + \frac{1}{2}.$$

【2230】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right).$

解 由于 $0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\frac{1}{k}} = \frac{1}{n(nk+1)} < \frac{1}{n^2}$, 故

$$0 < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} - \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} < \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

于是, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+\frac{1}{k}} \cdot 2^{\frac{k}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}.$

【2231】 求: $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx, \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx, \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx.$

解 $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx = 0, \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx = -\frac{d}{da} \int_b^a \sin x^2 dx = -\sin a^2, \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2.$

【2232】 求: (1) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$; (2) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$; (3) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$

解 (1) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt = \left(\frac{d}{d(x^2)} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right) \frac{d}{dx} (x^2) = 2x \sqrt{1+x^4};$

(2) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$
 $= \frac{d}{dx} (x^3) \frac{d}{d(x^3)} \int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{d}{dx} (x^2) \frac{d}{d(x^2)} \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}};$

(3) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt = \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^0 \cos(\pi t^2) dt + \frac{d}{dx} \int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$
 $= -\frac{d(\sin x)}{dx} \cdot \frac{d}{d(\sin x)} \int_0^{\sin x} \cos(\pi t^2) dt + \frac{d(\cos x)}{dx} \cdot \frac{d}{d(\cos x)} \int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$
 $= -\cos x \cos(\pi \sin^2 x) - \sin x \cos(\pi \cos^2 x) = (\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x).$

*) $\cos(\pi \cos^2 x) = \cos(\pi - \pi \sin^2 x) = -\cos(\pi \sin^2 x).$

【2233】 求:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x};$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}};$ (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx \right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx}.$

提示 利用洛必达法则及变上限积分的求导法则.

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 = 1;$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{\pi^2}{4};$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx \right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{x^2} dx}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{x^2} dx}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

【2234】 证明: 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}.$

提示 利用洛必达法则及变上限积分的求导法则.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{x^2} dx}{\frac{1}{2x} e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} (1 - \frac{1}{2x^2})} = 1$, 所以, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}$.

【2235】 求 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan x} dx}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin x} dx}$.

解 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan x} dx}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin x} dx} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\tan(\sin x)} (\sin x)'}{\sqrt{\sin(\tan x)} (\tan x)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\tan(\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{\tan x} \frac{\tan x}{\sin x (\tan x)}} \lim_{x \rightarrow +0} \cos^3 x = 1$.

【2236】 设 $f(x)$ 为连续正值函数, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 函数

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

递增.

证 首先注意, $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x f(x)}{f(x)} = 0$, 故若规定 $\varphi(0) = 0$, 则 $\varphi(x)$ 是 $x \geq 0$ 上的连续函数. 因为

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\left(\int_0^x f(t) dt\right)^2} \left\{ x f(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x t f(t) dt \right\} = \frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t) dt\right)^2} \int_0^x (x-t) f(t) dt > 0$$

($x > 0$),

所以, 当 $x \geq 0$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 递增.

【2237】 求:

$$(1) \int_0^2 f(x) dx, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad (2) \int_0^1 f(x) dx, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t, \\ t \frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

解 (1) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x) dx = \frac{5}{6}$.

(2) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^t x dx + \int_t^1 t \frac{1-x}{1-t} dx = \frac{t}{2}$.

【2238】 计算下列积分, 并作出这些积分对参数 a 的函数关系 $I = I(a)$ 的图像:

$$(1) I = \int_0^1 x|x-a| dx; \quad (2) I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+2a\cos x+a^2} dx; \quad (3) I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}.$$

解题思路 (1) 分别就 $a < 0$, $0 \leq a \leq 1$ 及 $a > 1$ 三种情况求积分.

(2) 分别就 $|a| \leq 1$ 及 $|a| > 1$ 两种情况求积分, 其中当 $|a| > 1$ 时还要利用 2028 题(1)的结果.

(3) 分别就 $|a| \leq 1$ 及 $|a| > 1$ 求积分.

解 (1) 分三种情况:

(i) 若 $a < 0$, 则 $I = \int_0^1 x(x-a) dx = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$;

(ii) 若 $a > 1$, 则 $I = \int_0^1 x(a-x) dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}$;

(iii) 若 $0 \leq a \leq 1$, 则 $I = \int_0^a x(a-x) dx + \int_a^1 x(x-a) dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$.

于是,

$$\int_0^1 x|x-a|dx = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{a}{2}, & a < 0, \\ \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}, & 0 \leq a \leq 1, \\ \frac{a}{2} - \frac{1}{3}, & a > 1. \end{cases} \quad (\text{图 4.9})$$

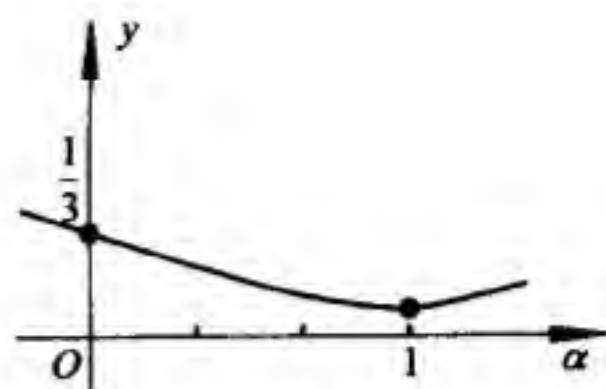


图 4.9

(2) 分两种情况:

(i) 若 $|a| \leq 1$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2a\cos x+a^2} dx = \frac{1}{4a^2} \int_0^\pi \frac{4a^2(1-\cos^2 x)dx}{(1+a^2)+2a\cos x} \\ &= \frac{1}{4a^2} \int_0^\pi \frac{[(1+a^2)^2-4a^2\cos^2 x]+[4a^2-(1+a^2)^2]}{(1+a^2)+2a\cos x} dx \\ &= \frac{1}{4a^2} \int_0^\pi [(1+a^2)-2a\cos x] dx - \frac{(1-a^2)^2}{4a^2} \int_0^\pi \frac{dx}{(1+a^2)+2a\cos x} \\ &= \frac{1}{4a^2} [(1+a^2)x - 2a\sin x] \Big|_0^\pi - \frac{(1-a^2)^2}{4a^2} \cdot \frac{2}{1-a^2} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+a^2-2a}{1+a^2+2a}} \tan \frac{x}{2}\right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{(1+a^2)\pi}{4a^2} - \frac{(1-a^2)\pi}{4a^2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(ii) 若 $|a| > 1$, 则同上述情况类似有

$$I = \frac{(1+a^2)\pi}{4a^2} - \frac{(a^2-1)^2}{4a^2} \cdot \frac{2}{a^2-1} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+a^2-2a}{1+a^2+2a}} \tan \frac{x}{2}\right) \Big|_0^\pi = \frac{(1+a^2)\pi}{4a^2} - \frac{(1-a^2)\pi}{4a^2} = \frac{\pi}{2a^2}.$$

于是,
$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{1+2a\cos x+a^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |a| \leq 1, \\ \frac{\pi}{2a^2}, & |a| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 4.10})$$

*) 利用 2028 题(1)的结果.

$$(3) \quad \int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{1+a^2-2a\cos x} \Big|_0^\pi = \begin{cases} 2, & |a| \leq 1, \\ \frac{2}{|a|}, & |a| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 4.11})$$

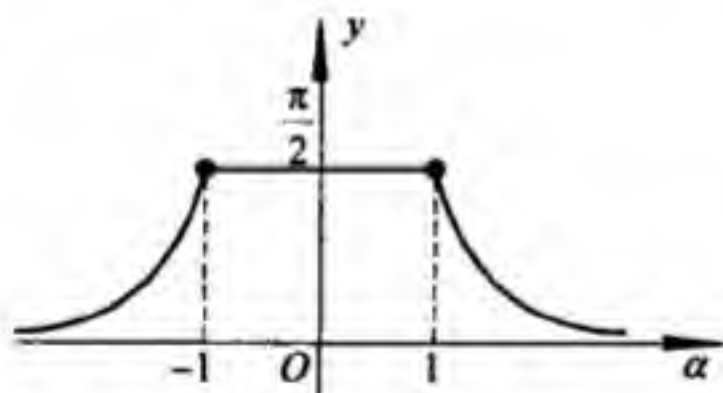


图 4.10

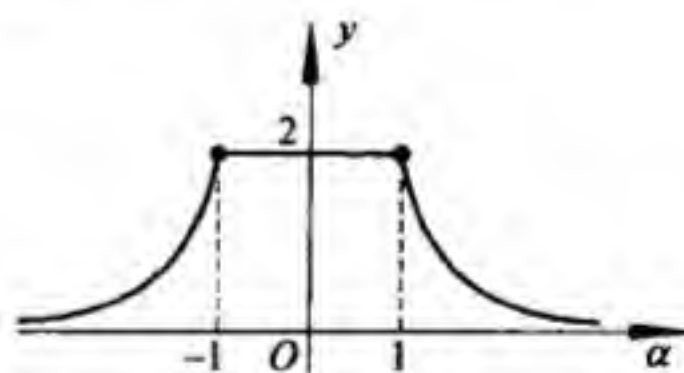


图 4.11

利用分部积分公式, 求下列定积分:

【2239】 $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$

解 $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx = -\int_0^{\ln 2} x d(e^{-x}) = -x e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = -\frac{1}{2} \ln 2 - e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}.$

【2240】 $\int_0^\pi x \sin x dx.$

解 $\int_0^\pi x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi.$

【2241】 $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$

解 $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx = 2 \left(x \cos x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos x dx \right) = 4\pi.$

【2242】⁺ $\int_{\frac{1}{e}}^e |\lg x| dx.$

提示 将区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 分成 $[\frac{1}{e}, 1]$ 及 $[1, e]$.

解 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\lg x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\lg x) dx + \int_1^e \lg x dx = \left(-x \lg x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{\ln 10} dx \right) + x \lg x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{\ln 10} dx$
 $= 2(1 - \frac{1}{e}) \lg e.$

【2243】 $\int_0^1 \arccos x dx.$

解 $\int_0^1 \arccos x dx = x \arccos x \Big|_0^1 + \lim_{x \rightarrow +0} \int_0^{1-x} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{1-x} = 1.$

【2244】⁺ $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx.$

解 $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{3}{2} \arctan \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt{3}$
 $= 2 \arctan \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

利用适当的变量代换,求下列定积分:

【2245】 $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$

解 设 $\sqrt{5-4x} = t$, 则 $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} = -\int_3^1 \frac{5-t^2}{8} dt = \frac{1}{6}.$

【2246】 $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0).$

解 设 $x = a \sin t$, 则

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

【2247】 $\int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$

提示 令 $\frac{1}{x+1} = t$.

解 设 $t = \frac{1}{x+1}$, 则

$$\int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int_{\frac{4}{7}}^1 \frac{dx}{\sqrt{2t^2-2t+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(2t-1+\sqrt{4t^2-4t+2}) \Big|_{\frac{4}{7}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}}{\frac{1}{7}+\sqrt{\frac{50}{49}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{7+7\sqrt{2}}{1+5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}.$$

【2248】 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$

解 设 $\sqrt{e^x - 1} = t$, 则

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = 2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2(t - \arctan t) \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

【2249】 $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt = (\arcsin t)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}.$$

【2250】 令 $x - \frac{1}{x} = t$, 计算积分 $\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$

解 由于被积函数是偶函数, 于是,

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = 2 \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \int_N^0 \frac{dt}{t^2+2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_N^0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

【2251】 对于下列定积分和代换 $x = \varphi(t)$:

(1) $\int_{-1}^1 dx, t = x^{\frac{2}{3}};$ (2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, x = \frac{1}{t};$ (3) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \tan x = t.$

说明为什么用 $\varphi(t)$ 代换 x 会引致不正确的结果.

解 (1) $\int_{-1}^1 dx = 2$. 但若作代换 $t = x^{\frac{2}{3}}$, 则得

$$\int_{-1}^1 dx = \pm \frac{3}{2} \int_1^1 t^{\frac{1}{2}} dt = 0.$$

其错误在于代换 $t = x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x = \pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值的.

(2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$. 但若作代换 $x = \frac{1}{t}$, 则得

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2},$$

于是得出错误的结果: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0$. 其错误在于 $x = \frac{1}{t}$, 当 $t=0$ (0 属于 $[-1, 1]$) 时不连续.

(3) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ 大于零, 但若作代换 $t = \tan x$, 则得

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

其错误在于 $t = \tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处不连续.

【2252】 在积分 $\int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx$ 中, 令 $x = \sin t$ 是否可以?

提示 不可以.

解 不可以. 因为 $\sin t = x$ 不可能大于 1.

【2253】 若在积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 中作变量代换 $x = \sin t$ 时, 可否取数 π 和 $\frac{\pi}{2}$ 作为新的积分上下限?

提示 可以. 因为满足定积分换元的条件.

解 可以. 因为满足定积分换元的条件. 事实上,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 t} d(\sin t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos t| \cos t dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 t dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

【2254】 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a+(b-a)x] dx.$$

提示 令 $x=a+(b-a)t$.

证 设 $x=a+(b-a)t$, 则 $dx=(b-a)dt$. 代入得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt, \quad \text{即} \quad \int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx.$$

【2255】 证明等式: $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x)dx \quad (a>0)$.

提示 令 $x=\sqrt{t}$.

证 设 $x=\sqrt{t}$, 则

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}} f(t) \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} tf(t)dt, \quad \text{即} \quad \int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x)dx.$$

【2256】 设 $f(x)$ 为闭区间 $[A, B] \supset [a, b]$ 上的连续函数, 当 $[a-x, b-x] \subset [A, B]$ 时, 求 $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y)dy$.

解 $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y)dy = \frac{d}{dx} \int_{a+x}^{b+x} f(y)dy = f(b+x) - f(a+x)$.

【2257】 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 则

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx; \quad (2) \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

提示 (1) 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, (2) 令 $x = \pi - t$.

证 (1) 设 $\frac{\pi}{2} - t = x$, 则 $dx = -dt$, 且 $f(\sin x) = f(\cos t)$. 代入得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt,$$

即
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

(2) 设 $\pi - t = x$, 则 $dx = -dt$, 且 $xf(\sin x) = (\pi - t)f(\sin t)$. 代入得

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = - \int_{\pi}^0 (\pi - t)f(\sin t)dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt,$$

即
$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

【2258】 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-l, l]$ 上连续, 则

$$(1) \text{ 若函数 } f(x) \text{ 为偶函数时, } \int_{-l}^l f(x)dx = 2 \int_0^l f(x)dx;$$

$$(2) \text{ 若函数 } f(x) \text{ 为奇函数时, } \int_{-l}^l f(x)dx = 0.$$

给出这些事实的几何解释.

提示 (1) 令 $x = -t$. (2) 同(1).

证 (1) 由于 $f(x)$ 为偶函数, 即 $f(x) = f(-x)$, ($x \in [-l, l]$). 于是, 设 $x = -t$, 则有

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x)dx &= \int_{-l}^0 f(x)dx + \int_0^l f(x)dx = - \int_l^0 f(-x)d(-x) + \int_0^l f(x)dx \\ &= - \int_l^0 f(t)dt + \int_0^l f(x)dx = \int_0^l f(t)dt + \int_0^l f(x)dx = 2 \int_0^l f(x)dx. \end{aligned}$$

其几何解释如下:

由于 $f(x) = f(-x)$, 故它的图像关于 Oy 轴对称. 于是, 由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = -l$ 及 $x = l$ 所围成的面积为由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 0$ 及 $x = l$ 所围成的面积 S 的两倍(图 4.12).

(2) 由于 $f(x) = -f(-x)$, 设 $x = -t$, 则

$$\int_{-l}^l f(x)dx = - \int_{-l}^0 f(-x)dx + \int_0^l f(x)dx = \int_l^0 f(t)dt + \int_0^l f(x)dx = 0.$$

其几何解释如下:

由于 $f(x) = -f(-x)$, 故它的图像关于原点对称. 于是, 由 $-l$ 到 0 之间所围之面积, 与由 0 到 l 之间所围成之面积绝对值相等, 符号相反, 故其面积的代数和为零(图 4.13).

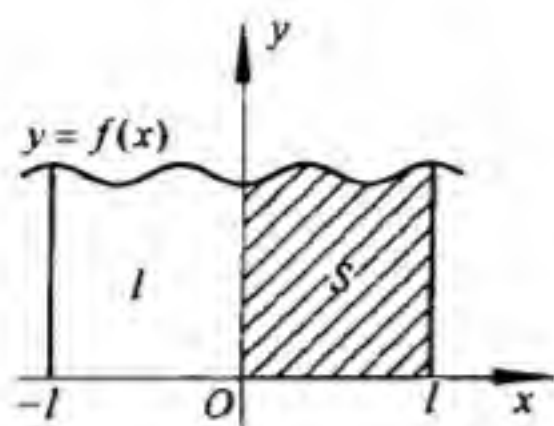


图 4.12

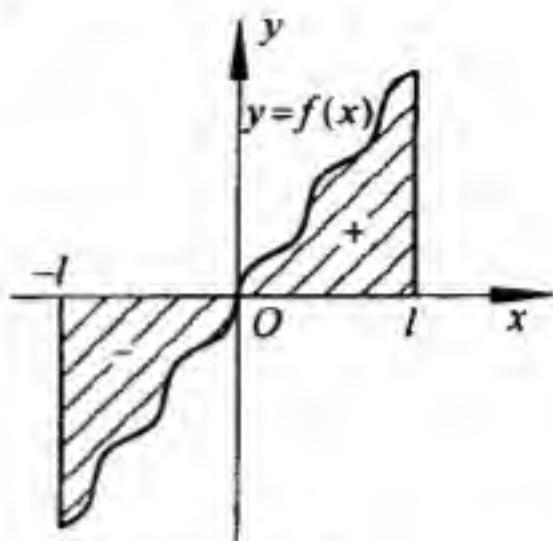


图 4.13

【2259】 证明: 偶函数的原函数中的一个为奇函数, 而奇函数的一切原函数皆为偶函数.

证 设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上定义*, 且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 当 $f(-x) = f(x)$ 时, 由于

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) \quad \text{及} \quad f(-x) = -\frac{d}{dx}F(-x),$$

故有 $\frac{d}{dx}[F(x) + F(-x)] = 0$, 从而可得 $F(x) + F(-x) = C_1$, 且 $C_1 = 2F(0)$. 于是, $f(x)$ 有一个原函数 $F(x) - F(0)$ 是奇函数.

当 $f(-x) = -f(x)$ 时, 类似地可得 $F(x) - F(-x) = C_2$, 且 $C_2 = 0$. 于是, $F(-x) = F(x)$, 即 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x) + C$ (C 为任意常数) 也为偶函数.

*) 如果 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上可积, 则由 $F_c(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ (C 是任意常数) 也可获证, 其中 $F_c(x)$ 为 $f(x)$ 的全部原函数.

【2260】 引入新变量 $t = x + \frac{1}{x}$, 计算积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx.$$

解 设 $t = x + \frac{1}{x}$, 则 $t^2 - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$, $x = \frac{1}{2}(t \pm \sqrt{t^2 - 4})$.

$$\begin{aligned} \text{于是,} \quad & \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} (1 + \sqrt{t^2 - 4}) e^t d\left[\frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2 - 4})\right] + \int_{\frac{5}{2}}^2 (1 - \sqrt{t^2 - 4}) e^t d\left[\frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2 - 4})\right] \\ &= \frac{1}{2} \int_2^{\frac{5}{2}} (1 + \sqrt{t^2 - 4}) e^t \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt - \frac{1}{2} \int_{\frac{5}{2}}^2 (1 - \sqrt{t^2 - 4}) e^t \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} e^t \left[\sqrt{t^2 - 4} + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right] dt = \int_2^{\frac{5}{2}} [\sqrt{t^2 - 4} d(e^t) + e^t d\sqrt{t^2 - 4}] \\ &= (\sqrt{t^2 - 4}) e^t \Big|_2^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

【2261】 在积分 $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$ 中进行变量代换 $\sin x = t$.

$$\text{解} \quad \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cos x dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \cos x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x) \cos x dx.$$

在右端的第一个积分中, 设 $\sin x = t$; 第二、第三个积分中, 设 $\sin(\pi - x) = t$; 第四个积分中, 设 $\sin(2\pi - x) = -t$. 代入得

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx = \int_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)] dt + \int_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)] dt.$$

【2262】 计算积分 $\int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \left[\cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right]' \right| dx$ (n 为正数).

提示 令 $x = e^{-t}$.

解 $\left[\cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right]' = \frac{\sin(-\ln x)}{x}$. 设 $x = e^{-t}$, 则 $dx = -e^{-t} dt$, $\frac{\sin(-\ln x)}{x} = \frac{\sin t}{e^{-t}} = e^t \sin t$. 代入得

$$\int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \left[\cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right]' \right| dx = \int_0^{2n\pi} |\sin t| dt = \sum_{k=1}^{2n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{\pi} \sin t dt = 2 \cdot 2n = 4n.$$

【2263】 求积分 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

提示 利用 2257 题(2)的结果.

$$\text{解 } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx^* = \frac{\pi}{2} [-\arctan(\cos x)] \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

*) 利用 2257 题(2)结果.

【2264】 设 $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, 求积分 $\int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx$.

提示 参看 2217 题后面所加注意.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx &= \int_{-1}^0 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx + \int_0^2 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx + \int_2^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx \\ &= \arctan f(x) \Big|_{-1}^0 + \arctan f(x) \Big|_0^2 + \arctan f(x) \Big|_2^3 \\ &= \left(-\frac{\pi}{2} - 0\right)^* + \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\arctan \frac{4^2 \cdot 2}{3^3 \cdot 1} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \arctan \frac{32}{27} - 2\pi. \end{aligned}$$

*) 参看 2217 题后的注意.

【2265】 证明:若 $f(x)$ 为定义在 $-\infty < x < +\infty$ 而周期为 T 的连续的周期函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

式中 a 为任意的数.

提示 将区间 $[a, a+T]$ 分成 $[a, 0]$ 、 $[0, T]$ 及 $[T, a+T]$, 并在积分 $\int_a^{a+T} f(x) dx$ 中, 令 $x = t + T$.

证

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx.$$

对上述等式右端的第三个积分, 设 $x - T = t$, 则

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t+T) dt = \int_0^a f(t) dt.$$

于是,

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

【2266】 证明:当 n 为奇数时, 函数

$$F(x) = \int_0^x \sin^n x dx \quad \text{及} \quad G(x) = \int_0^x \cos^n x dx$$

为以 2π 为周期的周期函数; 而当 n 为偶数时, 则其中的任何一个皆为线性函数与周期函数之和.

证 当 n 为奇数时, $\sin^n x$ 是奇函数, 而且是以 2π 为周期的函数. 于是,

$$F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \sin^n x dx + \int_{2\pi}^{x+2\pi} \sin^n x dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n(\pi-x) dx + \int_0^x \sin^n x dx = 0 + \int_0^x \sin^n x dx = F(x)$$

及
$$G(x+2\pi) = G(x) + \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = G(x) + \int_0^{\pi} \cos^n x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos^n x dx$$

$$= G(x) + \int_0^{\pi} \cos^n x dx + \int_0^{\pi} \cos^n(x+\pi) dx = G(x),$$

从而得知: $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是以 2π 为周期的周期函数. 当 n 为偶数时, 显然有

$$F(x+2\pi) = F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^n x dx, \quad G(x+2\pi) = G(x) + \int_0^{2\pi} \cos^n x dx.$$

但因
$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = a > 0,$$

所以, $F(x)$ 和 $G(x)$ 都不是以 2π 为周期的周期函数.

设 $F_1(x) = F(x) - \frac{a}{2\pi}x$, 则

$$F_1(x+2\pi) = F(x+2\pi) - \frac{a}{2\pi}(x+2\pi) = F(x) + a - \frac{a}{2\pi}x - a = F(x) - \frac{a}{2\pi}x = F_1(x).$$

即 $F_1(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 而

$$F(x) = F_1(x) + \frac{a}{2\pi}x.$$

所以, $F(x)$ 为周期函数与线性函数之和.

同理, 可以证明 $G(x)$ 也是周期函数与线性函数之和.

一般地, 当 $f(x)$ 为周期函数时, 可以证明: 函数 $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ 可表示成线性函数与周期函数之和.

【2267】 证明: 若 $f(x)$ 为以 T 为周期的连续的周期函数, 则函数

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

在一般的情形下是线性函数与周期等于 T 的周期函数之和.

证明思路 注意

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx = K \quad (K \text{ 为常数}).$$

当 $K=0$ 时, 则 $F(x)$ 为一周期函数. 当 $K \neq 0$ 时, 可令 $\varphi(x) = F(x) - \frac{K}{T}x$, 只要证明 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

证 因为 $F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$, 所以,

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(x) dx.$$

又因 $f(x)$ 是一周期为 T 的连续函数, 所以,

$$\int_x^{x+T} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx = K.$$

于是, $F(x+T) - F(x) = K$.

如果 $K=0$, 则 $F(x)$ 为周期等于 T 的周期函数.

如果 $K \neq 0$, 可考虑函数 $\varphi(x) = F(x) - \frac{K}{T}x$, 则因

$$\varphi(x+T) = F(x+T) - \frac{K}{T}(x+T) = F(x+T) - \frac{K}{T}x - K = F(x) - \frac{K}{T}x = \varphi(x),$$

所以, $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的周期函数, 从而, $F(x) = \varphi(x) + \frac{K}{T}x$, 即 $F(x)$ 是线性函数与周期等于 T 的周期函数之和.

计算下列积分:

【2268】 $\int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx.$

解 $\int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx = -\frac{1}{26}(2-x^2)^{13} \Big|_0^1 = 315 \frac{1}{26}.$

【2269】 $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2+x+1}.$

解 $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\frac{3}{4} + (x+\frac{1}{2})^2}$
 $= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$

【2270】⁺ $\int_1^e (x \ln x)^2 dx.$

解 $\int_1^e (x \ln x)^2 dx = x^3 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x^2 \ln x (1 + \ln x) dx = e^3 - 2 \int_1^e x^2 \ln x dx - 2 \int_1^e (x \ln x)^2 dx.$

移项合并得 $\int_1^e (x \ln x)^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{2}{9} x^3 \ln x - \frac{2}{27} x^3 \right) \Big|_1^e = \frac{5}{27} e^3 - \frac{2}{27}.$

【2271】 $\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx.$

提示 令 $\sqrt[3]{1-x} = t.$

解 设 $\sqrt[3]{1-x} = t$, 则 $\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx = -3 \int_0^{-2} (t^3 - t^5) dt = -66 \frac{6}{7}.$

【2272】⁺ $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$

提示 令 $x = \frac{1}{t}.$

解 设 $x = \frac{1}{t}$, 则 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1} = -\frac{\pi}{3}.$

【2273】 $\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx.$

提示 令 $1+3x^8 = t.$

解 设 $1+3x^8 = t$, 则 $24x^7 dx = dt$, $x^8 = \frac{1}{3}(t-1)$. 于是,

$$\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx = \frac{1}{72} \int_1^4 (t-1)t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{29}{270}.$$

【2274】 $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$

提示 使用分部积分法后, 再令 $\sqrt{x} = t.$

解 $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{\sqrt{x} dx}{2(1+x)} = \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{1+t^2}$
 $= \pi - (t - \arctan t) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$

*) 设 $\sqrt{x} = t.$

【2275】 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2-\cos x} - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} \\
 &= 4 \int_0^{\pi} \frac{dx}{4-\cos^2 x} - 6 \int_0^{\pi} \frac{dx}{9-\cos^2 x} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x} - 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{9\sin^2 x + 8\cos^2 x} \\
 &= 8 \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan x}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 12 \frac{1}{3\sqrt{8}} \arctan \frac{3\tan x}{\sqrt{8}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{【2276】} \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

提示 注意 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$, 并利用 2035 题的结果.

$$\text{解} \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2}.$$

*) 利用 2035 题的结果.

$$\text{【2277】} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

提示 同 1167 题.

$$\text{解} \quad \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x) \sin 2x = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} (\sin 6x - \sin 2x).$$

$$\text{于是,} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \left(-\frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{【2278】} \quad \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx \\
 &= \frac{\pi^3}{6} - \frac{x^2}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \sin 2x dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{x}{4} \cos 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos 2x dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【2279】} \quad \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$$

提示 注意 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, 并利用 1828 题的结果.

$$\text{解} \quad \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{e^x (1+\cos 2x)}{2} dx = \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{10} (\cos 2x + 2\sin 2x) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{5} (e^{\pi} - 1).$$

*) 利用 1828 题的结果.

$$\text{【2280】} \quad \int_0^{\ln 2} \text{sh}^4 x dx.$$

提示 利用 1761 题的结果.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int_0^{\ln 2} \text{sh}^4 x dx &= \int_0^{\ln 2} \text{sh}^2 x (\text{ch}^2 x - 1) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\ln 2} \text{sh}^2 2x dx - \int_0^{\ln 2} \text{sh}^2 x dx \\
 &= \frac{1}{4} \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{8} \text{sh} 4x \right) \Big|_0^{\ln 2} - \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \text{sh} 2x \right) \Big|_0^{\ln 2} = \frac{3}{8} \ln 2 - \frac{225}{1042}.
 \end{aligned}$$

*) 利用 1761 题的结果.

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值参数 n 的积分:

$$\text{【2281】} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

$$\text{提示} \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } I_n &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(\cos x) = - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\end{aligned}$$

移项合并得

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

利用上述递推公式即可求得

$$I_n = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n=2k, \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n=2k+1. \end{cases}$$

$$\text{【2282】 } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

提示 令 $\frac{\pi}{2} - x = t$, 并利用 2281 题的结果.

解 设 $\frac{\pi}{2} - x = t$, 则 $dx = -dt$, 且 $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$.

代入得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

因此, 与 2281 题的结果相同.

$$\text{【2283】 } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx.$$

提示 $I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}$.

$$\text{解 } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x d(\tan x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x dx = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1},$$

即

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

由于 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$, 于是, 利用上述递推公式即可求得

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2n-3} - I_{n-2} \right) = \cdots = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - \cdots + (-1)^n I_0 \\ &= (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) \right].\end{aligned}$$

$$\text{【2284】 } I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

提示 令 $x = \sin t$, 并利用 2282 题的结果.

解 设 $x = \sin t$, 代入得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

$$\text{【2285】 } I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解 设 $x = \sin t$, 代入得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

因此, 与 2281 题的结果相同.

$$\text{【2286】 } I_n = \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx.$$

提示 $I_n = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}$.

$$\text{解 } I_n = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln^n x \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx,$$

于是, $I_n = -\frac{n}{m+1} I_{n-1} = \left(-\frac{n}{m+1}\right) \left(-\frac{n-1}{m+1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{m+1}\right) I_0 = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$

$$\text{【2287】 } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx.$$

提示 注意 $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 及 $I_n = -\frac{1}{2n} - I_{n-1}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sec^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) d\left[\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] - I_{n-1} = -\frac{1}{2n} - I_{n-1}, \end{aligned}$$

即 $I_n = -\frac{1}{2n} - I_{n-1}$. 递推之, 得

$$I_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n-2)} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2} + (-1)^n I_0.$$

$$\text{但 } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\ln \left| \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln \sqrt{2},$$

$$\text{于是, } I_n = (-1)^n \left\{ -\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] \right\}.$$

设 $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ 是实变量 x 的复函数, 其中 $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ 及 $i^2 = -1$, 则按定义有:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx.$$

$$\text{显然, } \operatorname{Re} \int f(x) dx = \int \operatorname{Re} f(x) dx, \quad \operatorname{Im} \int f(x) dx = \int \operatorname{Im} f(x) dx.$$

【2288】 利用欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$,

$$\text{证明: } \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m = n \end{cases} \quad (n \text{ 及 } m \text{ 为整数}).$$

$$\text{证 当 } m=n \text{ 时, } \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

当 $m \neq n$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx &= \int_0^{2\pi} (\cos nx + i \sin nx) (\cos mx - i \sin mx) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx - i \int_0^{2\pi} \sin(m-n)x dx = 0. \end{aligned}$$

$$\text{【2289】 证明: } \int_a^b e^{(a+i\beta)x} dx = \frac{e^{b(a+i\beta)} - e^{a(a+i\beta)}}{a+i\beta} \quad (a \text{ 及 } \beta \text{ 为常数}).$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \int_a^b e^{(a+i\beta)x} dx &= \int_a^b e^{ax} \cos \beta x dx + i \int_a^b e^{ax} \sin \beta x dx = \frac{e^{ax} [a \cos \beta x + \beta \sin \beta x + i(a \sin \beta x - \beta \cos \beta x)]}{a^2 + \beta^2} \Big|_a^b \\ &= \frac{e^{ax} (a-i\beta)(\cos \beta x + i \sin \beta x)}{(a+i\beta)(a-i\beta)} \Big|_a^b = \frac{e^{(a+i\beta)x}}{a+i\beta} \Big|_a^b = \frac{e^{(a+i\beta)b} - e^{(a+i\beta)a}}{a+i\beta}. \end{aligned}$$

利用欧拉公式: $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. 计算下列积分 (m 及 n 为正整数):

【2290】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$

解 方法 1: 记

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx,$$

易见 $I_0 = \frac{1}{4} I$, 其中

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$$

利用欧拉公式, 有

$$\begin{aligned} \sin^{2m} x \cos^{2n} x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^{2m} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2n} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k e^{2(m-k)ix} \sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^l e^{2(n-l)ix} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l e^{2(m+n-k-l)ix} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l [\cos 2(m+n-k-l)x + i \sin 2(m+n-k-l)x], \end{aligned}$$

今不妨设 $m \leq n^*$, 作积分计算, 则有

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l \left(\int_0^{2\pi} \cos 2(m+n-k-l)x dx + i \int_0^{2\pi} \sin 2(m+n-k-l)x dx \right) \\ &= \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+2n-1}} \sum_{\substack{k+l=m+n \\ 0 \leq k \leq 2m \\ 0 \leq l \leq 2n}} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l = \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+2n-1}} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k} \end{aligned}$$

经计算, 可以验证有**

$$(-1)^m \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}.$$

于是, 得

$$I_0 = \frac{1}{4} I = \frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1} m!n!(m+n)!}.$$

方法 2: 令 $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$. 显然有

$$I_{m,0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n-1} x d(\sin x) = \frac{1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x d(\sin^{2m+1} x) \\ &= \frac{1}{2m+1} \cos^{2n-1} x \sin^{2m+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x d(\cos^{2n-1} x) \\ &= \frac{2n-1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2} x \cos^{2n-2} x dx = \frac{2n-1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x (1 - \cos^2 x) \cos^{2(n-1)} x dx \\ &= \frac{2n-1}{2m+1} I_{m,n-1} - \frac{2n-1}{2m+1} I_{m,n}, \end{aligned}$$

整理后得

$$I_{m,n} = \frac{2n-1}{2(m+n)} I_{m,n-1}.$$

由此不难得到

$$I_{m,n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)} I_{m,0} = \frac{(2n-1)!!m!}{2^n(m+n)!} \cdot \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

* 若 $m > n$ 作代换 $x = \frac{\pi}{2} - u$ 即得.

** 用 $C_m^k C_2^{m+n-k} = C_{2n}^m C_{2n}^n (C_{m+n}^m)^{-2} C_{m+n}^k C_{m+n}^{2m-k}$, 以及由恒等式 $(1-x)^{m+n}(1+x)^{m+n} = (1-x^2)^{m+n}$ 展开, 取 x^{2m} 的系数的关系式 $\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{m+n}^k C_{m+n}^{2m-k} = (-1)^m C_{m+n}^{m+n}$ 可以验证.

$$= \frac{\pi(2n-1)!!(2m-1)!!}{2^{m+n+1}(m+n)!} = \frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}.$$

【2291】 $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx.$

解 设 $u = \frac{\sin nx}{\sin x}$, 利用欧拉公式得 $u = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}}.$

当 $n=2k$ 时,

$$\begin{aligned} u &= (e^{ix} + e^{-ix})(e^{i(k-1)x} + e^{i(k-3)x} + \dots + e^{-i(k-3)x} + e^{-i(k-1)x}) \\ &= e^{(2k-1)ix} + e^{(2k-3)ix} + \dots + e^{ix} + e^{-ix} + \dots + e^{-(2k-1)ix} \\ &= 2[\cos(2k-1)x + \cos(2k-3)x + \dots + \cos x]. \end{aligned}$$

于是, $\int_0^\pi u dx = 2 \left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \frac{\sin(2k-3)x}{2k-3} + \dots + \sin x \right] \Big|_0^\pi = 0.$

当 $n=2k+1$ 时, 同上得 $u = 2[\cos 2kx + \cos 2(k-1)x + \dots + \cos 2x] + 1,$

于是, $\int_0^\pi u dx = \pi.$

最后得到 $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ \pi, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$

【2292】 $\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx.$

解 $\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} = \frac{e^{i(2n+1)x} + e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix} + e^{-ix}} = e^{2nix} - e^{2(n-1)ix} + \dots + (-1)^n + \dots + e^{-2nix}$
 $= 2[\cos 2nx - \cos 2(n-1)x + \dots + (-1)^{n-1} \cos 2x] + (-1)^n.$

于是, $\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx = (-1)^n \pi.$

【2293】 $\int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx$

解 $\cos^n x \cos nx = \frac{1}{2^{n+1}} (e^{ix} + e^{-ix})^n (e^{inx} + e^{-inx}) = \frac{1}{2^n} [\cos 2nx + C_n^1 \cos 2(n-1)x + \dots + C_n^{n-1} \cos 2x + 1].$

于是, $\int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^n}.$

【2294】 $\int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx.$

解 解法 1:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx &= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \int_0^\pi \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{i(n-2k)x} (e^{inx} - e^{-inx}) \right] dx \\ &= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \int_0^\pi e^{i(2n-2k)x} dx - \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \int_0^\pi e^{-i2kx} dx \right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1} i^{n+1}} [(-1)^n C_n^n \pi - (-1)^0 C_n^0 \pi] = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{\pi}{2^n} (-1)^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned}$$

由于 $\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$

于是, $\int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx = \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}.$

解法 2: 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin \left(\frac{n\pi}{2} - nt \right) dt = \sin \frac{n\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos ntdt - \cos \frac{n\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin ntdt$$

$$= \sin \frac{n\pi}{2} \int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

求下列积分 (n 为正整数):

【2295】 $\int_0^\pi \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx.$

解 $\int_0^\pi \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx = \int_0^\pi \sin^{n-1} x (\cos nx \cos x - \sin nx \sin x) dx$
 $= \int_0^\pi \sin^{n-1} x \cos nx d(\sin x) - \int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx$
 $= \frac{\sin^n x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^n x d(\cos nx) - \int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx = 0.$

【2296】 $\int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx.$

提示 对积分 $\int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx$ 使用两次分部积分.

解 考虑积分 $I = \int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx,$

并对它作两次分部积分, 可得 $I = I - \frac{n}{n+1} \int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx.$

于是, $\int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx = 0.$

本题也可不用分部积分法. 事实上, $\cos^{n-1} x \sin(n+1)x$ 是以 π 为周期的函数, 又是奇函数, 于是,

$$\int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx = 0.$$

【2297】 $\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx.$

解 解法 1: $\cos^{2n} x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \left[C_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x \right]$

于是, $I = \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ C_{2n}^n \int_0^{2\pi} e^{-ax} dx + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos 2(n-k)x dx \right\}$
 $= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ -\frac{1}{a} C_{2n}^n e^{-ax} \Big|_0^{2\pi} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{(2n-2k) \sin 2(n-k)x - a \cos 2(n-k)x}{a^2 + (2n-2k)^2} e^{-ax} \Big|_0^{2\pi} \right\}$
 $= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ -\frac{1}{a} C_{2n}^n (e^{-2\pi a} - 1) - a (e^{-2\pi a} - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2C_{2n}^k}{a^2 + (2n-2k)^2} \right\}$
 $= \frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n} a} \left\{ C_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2} \right\}.$

即 $\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx = \frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n} a} \left\{ C_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2} \right\}.$

解法 2: 由于 $\int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x} dx = \frac{e^{(a+ik)x}}{a+ik} \Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{a+ik} = \frac{(e^{2\pi a} - 1)(a-ik)}{a^2 + k^2},$

取实部, 得 $\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x} dx = \frac{a(e^{2\pi a} - 1)}{a^2 + k^2}.$

于是, $\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx = \int_0^{2\pi} e^{-ax} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2n} dx$
 $= \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{2\pi} e^{-ax} \left(\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(2n-2k)x} \right) dx = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \int_0^{2\pi} e^{-a+i(2n-2k)x} dx$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{e^{-2\pi a} - 1}{-a + i(2n-2k)} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{a(1-e^{-2\pi a})}{a^2 + (2n-2k)^2}$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}a} \left[C_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2} \right].$$

【2298】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cos 2nx dx.$

解 利用分部积分法,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cos 2nx dx = \frac{1}{2n} \sin 2nx \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \sin x}{\cos x} dx$$

$$= 0 + \frac{1}{4n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx - \frac{1}{4n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx.$$

对于上述等式右端的第二项和第三项的被积函数有下列等式:

$$\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} = \frac{e^{i(2n-1)x} + e^{-i(2n-1)x}}{e^{ix} + e^{-ix}} = 2[\cos 2(n-1)x - \cos 2(n-2)x + \cdots + (-1)^{n-2} \cos 2x] + (-1)^{n-1},$$

$$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} = 2[\cos 2nx - \cos 2(n-1)x + \cdots + (-1)^{n-1} \cos 2x] + (-1)^n.$$

由于积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx dx$ (k 为任意的正整数)

的值恒等于零,所以,积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx \quad \text{及} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx$$

分别等于 $(-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}$ 及 $(-1)^n \frac{\pi}{2}$. 这样,我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cos 2nx dx = \frac{1}{4n} \left[(-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} - (-1)^n \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{4n} (-1)^{n-1}.$$

*) 在 $x=0$ 处, $\sin 2nx \ln \cos x = 0$; 而在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处, 为“ $0 \cdot \infty$ ”型, 采用洛必达法则定值:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \sin 2nx \ln \cos x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \cos x}{\frac{1}{\sin 2nx}} = \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\sin x \sin^2 2nx}{\cos x \cos 2nx}$$

$$= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos x \sin^2 nx + 4n \sin x \sin 2nx \cos 2nx}{-\sin x \cos 2nx - 2n \cos x \sin 2nx} = 0.$$

【2299】 利用多次的分部积分法, 计算欧拉积分:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx,$$

式中 m 及 n 为正整数.

解 $B(m, n) = \frac{1}{m} x^m (1-x)^{n-1} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^m (1-x)^{n-2} dx = \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1).$

继续利用分部积分法, 可得

$$B(m, n) = \frac{(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{m(m+1) \cdots (m+n-2)} \int_0^1 x^{m+n-2} dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!} \cdot \frac{1}{m+n-1} x^{m+n-1} \Big|_0^1$$

$$= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

【2300】 勒让德多项式 $P_n(x)$ 可由下面公式来定义:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

证明:
$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

证 当 $m \neq n$ 时, 不失一般性, 设 $n < m$. 由于 $P_m(x)$ 为一 m 次的多项式, 我们记

$$P_m(x) = R^{(m)}(x),$$

其中 $R(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2 - 1)^n$. 利用多次分部积分法, 得

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx \\ &= [P_n(x)R^{(m-1)}(x) - P'_n(x)R^{(m-2)}(x) + \cdots + (-1)^{m-1}P_n^{(m-1)}(x)R(x)] \Big|_{-1}^1 + (-1)^m \int_{-1}^1 R(x)P_n^{(m)}(x)dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $m = n$ 时,

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \left[\frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \right]^2 dx,$$

设 $u = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$, $v = (x^2 - 1)^n$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} [uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v] \Big|_{-1}^1 + (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 vu^{(n)}dx \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} [(x^2 - 1)^n] dx = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt^{**} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

*) 设 $x = \sin t$.

**) 利用 2282 题的结果.

【2301】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 内除了有限个内点 $c_i (i=1, \cdots, p)$ 及点 a 与 b 外皆满足等式 $F'(x) = f(x)$, 而在这些点上 $F(x)$ 有第一类不连续点 (广义原函数). 证明:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^p [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

证 为确定起见, 设 $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_p < b$, 并记 $a = c_0, b = c_{p+1}$. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 故

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \sum_{i=1}^p \int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x)dx.$$

显然, 在 $[c_i + \eta, c_{i+1} - \eta]$ 上 $F'(x) = f(x)$, 从而可应用牛顿—莱布尼茨公式, 得

$$\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x)dx = F(c_{i+1}-\eta) - F(c_i+\eta).$$

由此可知

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\eta \rightarrow 0+} \sum_{i=0}^p [F(c_{i+1}-\eta) - F(c_i+\eta)] = \sum_{i=0}^p [F(c_{i+1}-0) - F(c_i+0)] \\ &= F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^p [F(c_i+0) - F(c_i-0)]. \end{aligned}$$

【2302】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 而 $F(x) = C + \int_a^x f(\xi)d\xi$ 为 $f(x)$ 的不定积分. 证明: 函数 $F(x)$ 连续, 且在函数 $f(x)$ 连续的一切点处成立等式

$$F'(x) = f(x),$$

问在函数 $f(x)$ 的不连续点处函数 $F(x)$ 的导数是什么?

解 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 故必有界: $|f(x)| \leq M (a \leq x \leq b)$. 因此, 对任何 $x \in [a, b]$, 有



$$|F(x+\Delta x)-F(x)|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi\right|\leq M|\Delta x|\rightarrow 0 \quad (\text{当 } \Delta x\rightarrow 0 \text{ 时}).$$

由此可知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

现设 $f(\xi)$ 在点 $\xi=x$ 处连续. 于是, 任给 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使当 $|\xi-x|<\delta$ 时, 恒有 $|f(\xi)-f(x)|<\epsilon$. 于是, 当 $0<|\Delta x|<\delta$ 时, 恒有

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}[f(\xi)-f(x)]d\xi\right|<\frac{1}{|\Delta x|}\epsilon|\Delta x|=\epsilon,$$

故 $F'(x)$ 存在, 且

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x).$$

而在不连续点处 $F'(x)$ 可能存在也可能不存在. 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x=\frac{1}{n}, \\ 0, & x\neq\frac{1}{n} \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的可积性可仿 2194 题证明, 而且显然有

$$\int_0^x f(t)dt=0 \quad (0\leq x\leq 1).$$

然而在点 $x=\frac{1}{n}$ 处, $F(x)=C$ 的导数 $F'(x)=0$ 是存在的.

但函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$, 它在 $[-1, 1]$ 上是可积的, 且

$$\int_0^x f(x)dx=|x|,$$

然而在 $x=0$ 点处, $F(x)=|x|+C$ 的导数 $F'(x)$ 不存在.

求下列有界不连续函数的不定积分:

【2303】 $\int \operatorname{sgn} x dx.$

解 $\int \operatorname{sgn} x dx = \int_0^x \operatorname{sgn} x dx + C = |x| + C.$

【2304】 $\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx.$

解 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 在任何有限区间上都可积, 故其原函数 $F(x)=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)dt$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 对任何 x , 必存在唯一的整数 k 使 $k\pi\leq x<(k+1)\pi$. 于是,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)dt = \int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\sin t)dt + \int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sgn}(\sin t)dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}dt = \frac{\pi}{2} + \arccos(\cos t) \Big|_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \\ &= \frac{\pi}{2} + \arccos(\cos x) - \frac{\pi}{2} = \arccos(\cos x). \end{aligned}$$

故

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x)dx = \arccos(\cos x) + C \quad (-\infty < x < +\infty).$$

【2305】 $\int [x]dx \quad (x\geq 0).$

解 $\int [x]dx = C + \int [x]dx = C + \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} x dx + \int_{[x]}^x [x]dx$
 $= C + \sum_{k=0}^{[x]-1} k + [x](x-[x]) = x[x] - \frac{[x]^2 + [x]}{2} + C.$

【2306】 $\int x[x]dx \quad (x \geq 0).$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x[x]dx &= C + \int_0^x x[x]dx = \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} kt dt + \int_{[x]}^x [x]t dt + C \\ &= \sum_{k=0}^{[x]-1} \left(\frac{kt^2}{2} \Big|_k^{k+1} \right) + \frac{[x]t^2}{2} \Big|_{[x]}^x + C = \sum_{k=0}^{[x]-1} \left(k^2 + \frac{k}{2} \right) + \frac{[x](x^2 - [x]^2)}{2} + C \\ &= \frac{([x]-1)[x](2[x]-1)}{6} + \frac{[x]([x]-1)}{4} + \frac{x^2[x] - [x]^3}{2} + C \\ &= \frac{x^2[x]}{2} - \frac{6[x]^3 - 3[x]([x]-1) - 2[x]([x]-1)(2[x]-1)}{12} + C \\ &= \frac{x^2[x]}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12} + C. \end{aligned}$$

【2307】 $\int (-1)^{[x]} dx.$

$$\text{解} \quad \int (-1)^{[x]} dx = \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin \pi x) dx + C = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) \Big|_0^x + C = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) + C.$$

*) 利用 2304 题的结果.

【2308】 $\int_0^x f(x)dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < l, \\ 0, & |x| > l. \end{cases}$

$$\text{解} \quad \int_0^x f(x)dx = \int_0^l f(x)dx + \int_l^x f(x)dx = \int_0^l 1dx + \int_l^x 0dx = l \quad (x \geq l),$$

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x 1dx = x \quad (|x| < l),$$

$$\int_0^x f(x)dx = -\int_x^{-l} f(x)dx - \int_{-l}^0 f(x)dx = -l \quad (x \leq -l).$$

$$\text{合并得} \quad \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{2}(|l+x| - |l-x|).$$

计算下列有界不连续函数的定积分:

【2309】 $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)dx.$

提示 注意 $\operatorname{sgn}(x-x^3) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ -1, & x \in (1,3]. \end{cases}$

解 $\operatorname{sgn}(x-x^3) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ -1, & x \in (1,3]. \end{cases}$

$$\text{于是,} \quad \int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)dx = \int_0^1 dx - \int_1^3 dx = -1.$$

【2310】 $\int_0^2 [e^x]dx.$

提示 将区间 $[0,2]$ 分成 $[0, \ln 2], [\ln 2, \ln 3], [\ln 3, \ln 4], \dots, [\ln 7, 2].$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^2 [e^x]dx &= \int_0^{\ln 2} 1dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2dx + \int_{\ln 3}^{\ln 4} 3dx + \dots + \int_{\ln 7}^2 7dx \\ &= \ln 2 + 2(\ln 3 - \ln 2) + 3(\ln 4 - \ln 3) + \dots + 7(-\ln 7 + 2) \\ &= 14 - (\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 7) = 14 - \ln 7!. \end{aligned}$$

【2311】 $\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx.$

提示 将区间 $[0,6]$ 分成 $[0,1], [1,2], [2,3], \dots, [5,6].$

$$\text{解} \quad \int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx = \int_1^2 \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_2^3 2 \sin \frac{\pi x}{6} dx + \dots + \int_5^6 5 \sin \frac{\pi x}{6} dx = \frac{30}{\pi}.$$

【2312】 $\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx.$

提示 将区间 $[0, \pi]$ 分成 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 及 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

解 $\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x) dx = -\frac{\pi^2}{4}.$

【2313】 $\int_1^{n+1} \ln[x] dx$, 其中 n 为正整数.

提示 将区间 $[1, n+1]$ 分成 $[1, 2], [2, 3], [3, 4], \dots, [n, n+1]$.

解 $\int_1^{n+1} \ln[x] dx = \int_1^2 \ln 2 dx + \int_2^3 \ln 3 dx + \dots + \int_n^{n+1} \ln n dx = \ln n!.$

【2314】 $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)] dx.$

提示 注意原式 $= \int_{e^{-\pi}}^1 (-1) dx + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}} dx.$

解 $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)] dx = \int_{e^{-\pi}}^1 (-1) dx + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}} dx$
 $= -1 + 2e^{-\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} e^{-(k-1)\pi} = -1 + \frac{2e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = \frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1} = -\operatorname{th} \frac{\pi}{2}.$

【2315】 求 $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$, 其中 E 为闭区间 $[0, 4\pi]$ 中使被积分式有意义的一切值的集合.

提示 E 中使被积函数有意义的区域为 $[0, \pi]$ 及 $[2\pi, 3\pi]$; 再将区间 $[0, \pi]$ 分成 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 及 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, 将区间 $[2\pi, 3\pi]$ 分成 $[2\pi, \frac{5\pi}{2}]$ 及 $[\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$.

解 $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx = \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx + \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x} dx + \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx + \int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x} dx$
 $= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx = \frac{8}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}.$

§ 3. 中值定理

1° 函数的平均值 数

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值.

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则可求得一点 $c \in (a, b)$, 使得

$$M[f] = f(c).$$

2° 第一中值定理 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界并可积; (2) 当 $a < x < b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx,$$

式中 $m \leq \mu \leq M$ 且 $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$; (3) 此外, 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\mu = f(c)$, 其中 $a \leq c \leq b$ (作者注: 可以证明, c 可取值使 $a < c < b$).

3° 第二中值定理 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界并可积; (2) 当 $a < x < b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 是单调的, 则

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^c f(x) dx + \varphi(b-0) \int_c^b f(x) dx,$$

式中 $a \leq \xi \leq b$; (3) 此外, 若函数 $\varphi(x)$ 单调下降 (广义的) 且不为负, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b);$$

(3') 若函数 $\varphi(x)$ 单调上升 (广义的) 且不为负, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b-0) \int_{\xi}^b f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

【2316】 确定下列定积分的符号:

$$(1) \int_0^{2\pi} x \sin x dx; \quad (2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx; \quad (3) \int_{-2}^2 x^3 2^x dx; \quad (4) \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx.$$

提示 (2) 及 (3) 使用第一中值定理.

$$\text{解} \quad (1) \int_0^{2\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_0^{\pi} (t+\pi) \sin t dt = -\pi \int_0^{\pi} \sin x dx < 0.$$

(2) 由第一中值定理知

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+\pi} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x(x+\pi)} dx \\ &= \frac{\pi^2 \sin c}{c(c+\pi)} > 0, \quad (\text{其中 } 0 < c < \pi). \end{aligned}$$

(3) 由第一中值定理知

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x^3 e^x dx &= \int_{-2}^0 x^3 e^x dx + \int_0^2 x^3 e^x dx = \int_{-2}^0 t^3 e^{-t} dt + \int_0^2 x^3 e^x dx = \int_0^2 x^3 (e^x - e^{-x}) dx \\ &= 2c^3 (e^c - e^{-c}) > 0 \quad (\text{其中 } 0 < c < 2). \end{aligned}$$

$$(4) \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx = \frac{1}{2} c^2 \ln c < 0 \quad (\text{其中 } \frac{1}{2} < c < 1).$$

【2317】 确定哪个积分较大:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \quad \text{或} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx; \quad (2) \int_0^1 e^{-x} dx \quad \text{或} \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx;$$

$$(3) \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \quad \text{或} \quad \int_0^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx.$$

解 (1) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $0 < \sin x < 1$, 从而, $0 < \sin^{10} x < \sin^2 x$. 于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$$

(2) 当 $0 < x < 1$ 时, $x > x^2$, 从而, $e^{-x} < e^{-x^2}$. 于是,

$$\int_0^1 e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

$$(3) \int_0^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} e^{-(x+x)^2} \cos^2 x dx \leq \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx.$$

【2318】 求下列函数在所给区间内的平均值:

$$(1) f(x) = x^2 \quad \text{在 } [0, 1] \text{ 上};$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x} \quad \text{在 } [0, 100] \text{ 上};$$

$$(3) f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x \quad \text{在 } [0, 2\pi] \text{ 上};$$

$$(4) f(x) = \sin x \sin(x+\varphi) \quad \text{在 } [0, 2\pi] \text{ 上}.$$

$$\text{解} \quad (1) M[f] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3};$$

$$(2) M[f] = \frac{1}{100} \int_0^{100} \sqrt{x} dx = 6 \frac{2}{3};$$

$$(3) M[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (10 + 2\sin x + 3\cos x) dx = 10;$$

$$(4) M[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \sin(x+\varphi) dx = \frac{1}{2} \cos \varphi.$$

【2319】 求椭圆之焦径 $r = \frac{p}{1-\epsilon \cos \varphi}$ ($0 < \epsilon < 1$) 之长的平均值.

解 设 $\varphi = \pi + t$, 则

$$M(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{p}{1 + \epsilon \cos t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} d\varphi = \frac{p}{2\pi} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = b,$$

其中 b 为椭圆的短半轴.

*) 利用 2213 题的结果.

【2320】 求初速度为 v_0 之自由落体的速度之平均值.

解 自由落体的速度为 $v = v_0 + gt$, 从 $t = 0$ 到 $t = T$ 时间内的速度的平均值为

$$M[v] = \frac{1}{T} \int_0^T (v_0 + gt) dt = \frac{1}{2} gT + v_0 = \frac{1}{2} (v_0 + v_T).$$

物理意义: 平均速度等于初速与末速之和的一半.

【2321】 电流强度依规律 $i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$,

变化, 其中 i_0 为振幅, t 为时间, T 为周期, φ 为初相, 求电流强度之平方的平均值.

$$\text{解 } M(i^2) = \frac{1}{T} \int_0^T i_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) dt = \frac{i_0^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) - \frac{1}{4} \sin 2\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) \right] \Big|_0^T = \frac{i_0^2}{2}.$$

将上式开平方, 即得电流的有效值 $\frac{i_0}{\sqrt{2}}$.

【2322】 命 $\int_0^x f(t) dt = x f(\theta x)$, 求 θ , 设: (1) $f(t) = t^n (n > -1)$; (2) $f(t) = \ln t$; (3) $f(t) = e^t$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \theta$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta$ 等于什么?

$$\text{解 (1)} \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ 从而, } \frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta^n x^{n+1}. \text{ 于是, } \theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

$$(2) \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \ln t dt = t(\ln t - 1) \Big|_0^x = x(\ln x - 1), \text{ 从而, } x(\ln x - 1) = x \ln \theta x. \text{ 于是, } \theta = \frac{1}{e}.$$

$$(3) \int_0^x f(t) dt = \int_0^x e^t dt = e^x \Big|_0^x = e^x - 1, \text{ 从而, } e^x - 1 = x e^{\theta x}, \text{ 于是, } \theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}. \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \text{ 故}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型不定式. 因此,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \theta &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1 + xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{-x} \frac{e^x - 1}{x} + 1} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1.$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta = 1$.

利用第一中值定理, 估计积分:

$$\text{【2323】 } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x}.$$

解 由于

$$\frac{1}{1 + 0.5} \leq \frac{1}{1 + 0.5 \cos x} \leq \frac{1}{1 - 0.5},$$

即

$$\frac{2}{3} \leq \frac{1}{1 + 0.5 \cos x} \leq 2.$$

于是,

$$\frac{4\pi}{3} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x} \leq 4\pi$$

即

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5\cos x} = \frac{8\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3}\theta \quad (|\theta| \leq 1).$$

【2324】 $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx.$

解 由于 $\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leq x^9 \quad (0 \leq x \leq 1)$, 从而,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leq \int_0^1 x^9 dx,$$

即

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leq \frac{1}{10}.$$

【2325】 $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$

解 $I = \int_0^{50} \frac{e^{-x}}{x+100} dx + \int_{50}^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx = \frac{1}{100+\xi_1} \int_0^{50} e^{-x} dx + \frac{1}{100+\xi_2} \int_{50}^{100} e^{-x} dx$
 $= \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2},$

其中 $0 \leq \xi_1 \leq 50, 50 \leq \xi_2 \leq 100$. 显然

$$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2} \leq \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_1} = \frac{1-e^{-100}}{100+\xi_1} < \frac{1}{100},$$

$$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2} > \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} \geq \frac{1-e^{-50}}{150} > \frac{1}{200},$$

故 $\frac{1}{200} < I < \frac{1}{100}$, 即 $I = 0.01 - 0.005\theta, 0 < \theta < 1$. 此外, 按中值定理, 可写

$$I = \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx = \frac{1}{\xi+100} \int_0^{100} e^{-x} dx = \frac{1}{\xi+100} \left(1 - \frac{1}{e^{100}}\right),$$

其中 $0 \leq \xi \leq 100$, 如果改写 I 为 $I = 0.01 - 0.005\theta$, 则有 $\theta = f(\xi) = \frac{2}{100+\xi} \left(\xi + \frac{100}{e^{100}}\right)$.

易见导数

$$f'(\xi) = \frac{200(1-e^{-100})}{(100+\xi)^2} > 0,$$

$f(\xi)$ 单调上升, 故在 $[0, 100]$ 上有 $f(0) \leq f(\xi) \leq f(100)$, 也即有 $\frac{2}{e^{100}} \leq \theta \leq 1 + \frac{1}{e^{100}}$.

根据前面的估计 $0 < \theta < 1$, 综合起来, 便有 $\frac{2}{e^{100}} \leq \theta < 1$.

这个结果比原来的估计又好了一些. 如果更精确一些, 采用些近似计算方法, 还可进一步明确 θ 的数值范围. 此处从略.

【2326】 证明等式: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$.

证 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi_n} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\xi_n} \cdot \frac{1}{n+1} \right) = 0$;

(2) 任意给定 $\epsilon > 0$, 且设 $\epsilon < \frac{\pi}{2}$, 则

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sin^n x dx + \epsilon \leq \epsilon + \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right).$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述不等式的第二项趋于零, 于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

【2327】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且在 (a, b) 上可微, 并且当 $a < x < b$ 时 $\varphi'(x) \geq 0$, 应用分部积分法及第一中值定理, 证明第二中值定理.

证 设 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= \int_a^b \varphi(x)dF(x) = F(x)\varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)\varphi'(x)dx \\
&= F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi) \int_a^b \varphi'(x)dx = F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi)[\varphi(b) - \varphi(a)]^{**} \\
&= \varphi(b)[F(b) - F(\xi)] + \varphi(a)[F(\xi) - F(a)] = \varphi(b) \int_\xi^b f(x)dx + \varphi(a) \int_a^\xi f(x)dx.
\end{aligned}$$

*) 一般数学分析教程中已有第二中值定理的证明, 本题限用分部积分法证明, 应加 $\varphi'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续的条件.

利用第二中值定理, 估计积分:

【2328】 $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

解 设 $f(x) = \sin x, \varphi(x) = \frac{1}{x},$

则 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[100\pi, 200\pi]$ 上满足第二中值定理的条件, 又 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ 单调下降且不为负, 于是,

$$\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^\xi \sin x dx = \frac{1 - \cos \xi}{100\pi} = \frac{\sin^2 \frac{\xi}{2}}{50\pi} = \frac{\theta}{50\pi},$$

其中 $100\pi \leq \xi \leq 200\pi$ 及 $0 \leq \theta \leq 1$.

【2329】 $\int_a^b \frac{e^{-ax}}{x} \sin x dx \quad (a \geq 0; 0 < a < b).$

解 设 $f(x) = \sin x, \varphi(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$, 同上题, 有

$$\int_a^b \frac{e^{-ax}}{x} \sin x dx = \frac{e^{-a\xi}}{a} \int_a^\xi \sin x dx = \frac{1}{ae^{a\xi}} (\cos a - \cos \xi) = -\frac{2}{a} e^{-a\xi} \sin \frac{a+\xi}{2} \sin \frac{a-\xi}{2} = \frac{2}{a} \theta,$$

其中 $a \leq \xi \leq b$ 及 $|\theta| < 1$.

【2330】 $\int_a^b \sin x^2 dx \quad (0 < a < b).$

解 设 $x = \sqrt{t}$. 则 $\int_a^b \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$

其次, 设 $f(t) = \sin t, \varphi(t) = (\sqrt{t})^{-1}$, 则 $\varphi(t)$ 单调下降, 且 $\varphi(t) > 0$. 于是,

$$\frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2a} \int_{a^2}^\xi \sin t dt = \frac{1}{2a} (\cos a^2 - \cos \xi) = \frac{1}{a} \sin \frac{\xi+a^2}{2} \sin \frac{\xi-a^2}{2} = \frac{1}{a} \theta,$$

其中

$$a^2 \leq \xi \leq b^2, |\theta| \leq 1.$$

所以,

$$\int_a^b \sin x^2 dx = \frac{\theta}{a} \quad (|\theta| \leq 1).$$

【2331】 设函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 和它们的平方在区间 $[a, b]$ 上可积. 证明柯西—布尼亚科夫斯基不等式:

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x)dx \int_a^b \psi^2(x)dx.$$

提示 考虑积分 $\int_a^b [\varphi(x) - \lambda\psi(x)]^2 dx$, 其中 λ 为任意实数.

证 证法 1: 我们有

$$\begin{aligned}
& \left(\int_a^b \varphi^2(x)dx \right) \left(\int_a^b \psi^2(x)dx \right) - \left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \varphi^2(y)dy \right) \left(\int_a^b \psi^2(y)dy \right) + \frac{1}{2} \left(\int_a^b \psi^2(y)dy \right) \left(\int_a^b \varphi^2(y)dy \right) - \left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx \right) \left(\int_a^b \varphi(y)\psi(y)dy \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \int_a^b [\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)]^2 dx \right\} dy \geq 0,
\end{aligned}$$

故

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx.$$

证法 2: 考虑积分

$$\int_a^b [\varphi(x) - \lambda \psi(x)]^2 dx,$$

其中 λ 为任意实数. 从而有

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx - 2\lambda \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx + \lambda^2 \int_a^b \psi^2(x) dx \geq 0.$$

这是关于变量 λ 的不等式, 左端是二次三项式. 于是, 其判别式

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right\}^2 - \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx \leq 0,$$

即

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx.$$

【2332】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续可微且 $f(a) = 0$, 证明不等式:

$$M^2 \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx,$$

其中 $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

提示 利用 2331 题的结果, 有

$$\left[\int_a^x f'(t) dt \right]^2 \leq \int_a^x 1 dt \int_a^x f'^2(t) dt.$$

证 设 x 为 $[a, b]$ 上任一点, 利用柯西—布尼亚科夫斯基不等式得到

$$\left\{ \int_a^x f'(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^x 1 dx \int_a^x f'^2(x) dx,$$

即

$$f^2(x) = [f(x) - f(a)]^2 \leq (x-a) \int_a^x f'^2(x) dx \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx.$$

由此可知 $M^2 = \sup_{x \in [a, b]} f^2(x) \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx$.

【2333】 证明: 等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

提示 使用第一中值定理或第二中值定理.

证 证法 1: 应用第一中值定理, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \xi_n}{\xi_n} p = 0,$$

其中 ξ_n 为界于 n 与 $n+p$ 之间的某值.

证法 2: 应用第二中值定理, 得

$$\left| \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \frac{1}{n} \left| \int_n^{\xi'} \sin x dx \right| = \frac{1}{n} |\cos n - \cos \xi'| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

其中 ξ' 是界于 n 与 $n+p$ 之间的某值. 于是, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0$.

§ 4. 广义积分

1° 函数的广义可积分性 若函数 $f(x)$ 在每一个有限区间 $[a, b]$ 上依寻常的意义是可积的, 则可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

若函数 $f(x)$ 在点 b 的邻域内无界且在每一个区间 $(a, b-\epsilon)$ ($\epsilon > 0$) 内依寻常的意义是可积的, 则取

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx. \quad (2)$$

若极限(1)或(2)存在, 则相应的积分称为收敛的, 否则称为发散的(在基本的意义上).

2° 柯西准则 积分(1)收敛的充要条件为: 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在数 $b = b(\epsilon)$, 当 $b' > b$ 及 $b'' > b$ 时, 下面

的不等式成立:

$$\left| \int_a^{b'} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

对于形如(2)的积分柯西准则的表述是类似的.

3° 绝对收敛的判别法 若 $|f(x)|$ 是广义可积的, 则函数 $f(x)$ 所对应的积分(1)或(2)称为绝对收敛的, 而且显然也是收敛的.

比较判别法 I. 设当 $x \geq a$ 时 $|f(x)| \leq F(x)$. 若 $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛.

比较判别法 II. 若 $\varphi(x) > 0$ 及当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi(x) = O^*[\psi(x)]$, 则积分 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 及 $\int_a^{+\infty} \psi(x) dx$ 同时收敛或同时发散. 就特别情形来说, 若当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则上面的结果也成立.

比较判别法 III. (1) 设当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$. 在这种情况下, 当 $p > 1$ 时, 积分(1)收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 积分(1)发散.

(2) 设当 $x \rightarrow b-0$ 时, $f(x) = O^*\left[\frac{1}{(b-x)^p}\right]$. 在这种情况下, 当 $p < 1$ 时, 积分(2)收敛; 当 $p \geq 1$ 时, 积分(2)发散.

4° 收敛性的较精密的判别法 若(1)当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 单调地趋近于零; (2)函数 $f(x)$ 有有界的原函数

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

收敛, 但一般地说, 并非绝对收敛.

在特殊情形下, 若 $p > 0$, 则积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad \text{及} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (a > 0)$$

收敛.

5° 柯西主值 若对于任意的 $\epsilon > 0$, 函数 $f(x)$ 的积分

$$\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx \quad \text{及} \quad \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \quad (a < c < b)$$

存在, 则柯西主值(V.P.)为

$$V.P. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right].$$

相仿地,

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

计算下列积分:

$$\text{【2334】} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0).$$

解 由于 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a}$, 所以, $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}$.

$$\text{【2335】} \int_0^1 \ln x dx.$$

解 由于 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\epsilon - \epsilon \ln \epsilon - 1) = -1$, 所以, $\int_0^1 \ln x dx = -1$.

$$\text{【2336】} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

解 由于 $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, 所以, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

【2337】 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 由于 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-1+\epsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\epsilon' \rightarrow +0} \int_0^{1-\epsilon'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [-\arcsin(-1+\epsilon)] + \lim_{\epsilon' \rightarrow +0} \arcsin(1-\epsilon') = \pi$,

所以, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.

【2338】 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

解 由于 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} \right) \Big|_2^b = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{b-1}{b+2} + 2 \ln 2 \right) = \frac{2}{3} \ln 2$,

所以, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{2}{3} \ln 2$.

【2339】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

提示 从定义出发, 并利用 1921 题的递推公式.

解 $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

由于

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left[\frac{2a+1}{3(a^2+a+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2a+1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \\ &+ \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\frac{2b+1}{3(b^2+b+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2b+1}{\sqrt{3}} \right] - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \\ &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

所以, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

*) 利用 1921 题的递推公式.

【2340】 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

提示 从定义出发, 并利用 1881 题的结果.

解 由于 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] \Big|_0^b = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$,

所以, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

*) 利用 1881 题的结果.

【2341】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

提示 从定义出发, 并利用 1712 题的结果.

解 由于 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} \right) \Big|_0^b = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, 所以, $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

*) 利用 1712 题的结果.

【2342】 $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

提示 令 $\sqrt{1-x}=t$, 并从定义出发.

解 先求 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. 设 $\sqrt{1-x}=t$, 则 $x=1-t^2$, $dx=-2tdt$, $2-x=1+t^2$.

代入得 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} = -2\arctan t + C = -2\arctan \sqrt{1-x} + C$.

由于 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(-2\arctan \sqrt{1-x} \Big|_0^{1-\epsilon} \right) = -2 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\arctan \sqrt{1-(1-\epsilon)} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{2}$.

所以, $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{2}$.

【2343】 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^{10}}}$.

提示 令 $\sqrt{1+x^3+x^{10}}=t-x^5$, 并从定义出发.

解 设 $\sqrt{1+x^3+x^{10}}=t-x^5$. 则当 $1 \leq x < +\infty$ 时, $1+\sqrt{3} \leq t < +\infty$. 代入得

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^{10}}} = \frac{2}{5} \int_{1+\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{5} \ln \frac{t-1}{t+1} \Big|_{1+\sqrt{3}}^{+\infty} = \frac{1}{5} \ln 1 - \frac{1}{5} \ln \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

*) 牛顿—莱布尼茨公式对于广义积分也成立. 例如,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty},$$

其中 $F(+\infty)$ 是一个符号, 代表 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ (假定此极限存在有限), 下同, 不再说明.

【2344】 $\int_a^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

解 我们有

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \int_b^{1-\epsilon} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right] \Big|_b^{1-\epsilon}$

$$= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left[-\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{\ln \epsilon}{2(1+\epsilon^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{b^2}{b^2+1} - \frac{1}{4} \ln \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+1} \right]$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[-\frac{\epsilon^2}{2(\epsilon^2+1)} \ln \epsilon + \frac{1}{4} \ln(\epsilon^2+1) \right] = 0.$$

所以, $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = 0$.

注 $\epsilon \rightarrow +0$ 与 $b \rightarrow +\infty$ 的极限过程是独立的, 因此, 可分别取极限.

【2345】 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

解 设 $x = \tan t$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sec^2 t dt}{\sec^3 t} = (t \sin t + \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$.

【2346】 $\int_a^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0)$.

解 $\int_a^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \left(\frac{-a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \right) \Big|_a^{+\infty} = \frac{a}{a^2 + b^2}$.

*) 利用 1828 题的结果.

【2347】 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a>0).$

解 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \left(\frac{-a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$

*) 利用 1829 题的结果.

利用递推公式计算下列广义积分 (n 为正整数):

【2348】 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$

提示 $I_n = n I_{n-1}.$

解 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n d(-e^{-x}) = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1}.$

即 $I_n = n I_{n-1}$, 利用此递推公式及 $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1,$

容易得到 $I_n = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 I_0 = n!.$

【2349】⁺ $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + 2bx + c)^n} \quad (ac - b^2 > 0).$

解题思路 利用 1921 题的递推公式及定义可得

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{a}{ac-b^2} I_{n-1},$$

并注意 $I_1 = \frac{\pi \operatorname{sgn} a}{\sqrt{ac-b^2}}.$

解 $I_n = \frac{ax+b}{2(n-1)(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)^{n-1}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{a}{2(ac-b^2)} I_{n-1} = \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{a}{ac-b^2} I_{n-1},$

即 $I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{a}{ac-b^2} I_{n-1} \quad (n>1).$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{ac-b^2}} \arctan \frac{|a|(x+\frac{b}{a})}{\sqrt{ac-b^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi \operatorname{sgn} a}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

利用递推公式及 I_1 容易得到

$$I_n = \frac{(2n-3)(2n-5) \cdots 3 \cdot 1}{(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

*) 利用 1921 题的结果.

【2350】⁺ $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$

解 由于 $x^{n+1} \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时), 且 $n+1>1$, 所以, 积分 I_n 收敛.

其次, 我们来计算 I_n . 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)} &= \frac{1}{n!x} - \frac{1}{(n-1)!(x+1)} + \frac{1}{2!(n-2)!(x+2)} - \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!(n-k)!(x+k)} \\ &\quad + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!(x+n)}, \end{aligned}$$

所以, $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{dx}{x+k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln(x+k) \Big|_1^{+\infty},$

其中 C_n^k 为从 n 个元素中每次取 k 个的组合数.

对于 n , 不论是偶数还是奇数, 用上限代入 (此处理解为趋近于无穷时的极限) 后均为零. 事实上, 当 $n=$

2m 时,

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_n^k \ln(x+k) = \ln \frac{x(x+2)^{C_{2n}^2} \cdots (x+2m)^{C_{2n}^{2m}}}{(x+1)^{C_{2n}^1} (x+3)^{C_{2n}^3} \cdots (x+2m-1)^{C_{2n}^{2m-1}}}.$$

由于

$$1 + C_{2m}^2 + \cdots + C_{2m}^{2m} = C_{2m}^1 + C_{2m}^3 + \cdots + C_{2m}^{2m-1},$$

所以,当 $m \rightarrow +\infty$ 时

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_n^k \ln(x+k) \rightarrow \ln 1 = 0;$$

当 $n=2m-1$ 时,

$$\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k C_n^k \ln(x+k) = \ln \frac{x(x+2)^{C_{2n-1}^2} \cdots (x+2m-2)^{C_{2n-1}^{2m-2}}}{(x+1)^{C_{2n-1}^1} (x+3)^{C_{2n-1}^3} \cdots (x+2m-1)^{C_{2n-1}^{2m-1}}} \rightarrow 0$$

(当 $m \rightarrow +\infty$ 时).

最后我们得到 $I_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} C_n^k \ln(1+k)$.

$$\text{【2351】 } I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$$

解题思路 注意到当 $x \rightarrow 1-0$ 时,

$$\sqrt{1-x} \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}},$$

故积分 I_n 收敛.

解 由于 $\sqrt{1-x} \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ (当 $x \rightarrow 1-0$ 时), 且 $p = \frac{1}{2} < 1$, 所以, 积分 I_n 收敛.

$$\text{其次, 设 } x = \sin t, \text{ 则 } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n=2k, \\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & n=2k-1. \end{cases}$$

*) 利用 2281 题的结果.

$$\text{【2352】 } I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$$

提示 令 $x = \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right)$, 并利用 2282 题的结果.

解 设 $x = \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right)$, 则当 $0 \leq x < +\infty$ 时, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n=2k, \\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & n=2k-1. \end{cases}$$

*) 利用 2282 题的结果.

$$\text{【2353】 (1) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx.$$

解题思路 首先, 容易证明它们是收敛的.

其次, 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 可得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = A$. 相加即得 $2A = A - \frac{\pi}{2} \ln 2$.

解 先证明它们是收敛的. 事实上, 当 $x \rightarrow +0$ 时, $\sqrt{x} \ln \sin x \rightarrow 0$, 所以, 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ 收敛.

同法可证积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$ 也收敛.

其次, 求这两个积分的值. 设 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = A.$$

相加得 $2A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x + \ln \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx - \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin t dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t dt \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 = A - \frac{\pi}{2} \ln 2,$$

于是, $2A = A - \frac{\pi}{2} \ln 2$, $A = -\frac{\pi}{2} \ln 2$, 即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

【2354】 求

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx,$$

其中 E 表区间 $(0, +\infty)$ 中使被积分式有意义的一切 x 值的集合.

解题思路 首先, 注意到

$$\text{原式} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx.$$

其次, 将 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 分成 $[2k\pi, (2k+\frac{1}{4})\pi]$ 及 $[(2k+\frac{1}{4})\pi, (2k+1)\pi]$, 并注意到

$$(2e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x})' = e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}},$$

分区间积分即易获解.

解 $\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx, *$

对于广义积分 $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$ 作如下处理:

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx = \int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx + \int_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$= 2e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} \Big|_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi} - 2e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} \Big|_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi} = 2\sqrt[4]{8} e^{-k\pi} e^{-\frac{\pi}{8}}.$$

注意到

$$\sum_{k=0}^n 2\sqrt[4]{8} e^{-\frac{\pi}{8}} e^{-k\pi} = 2\sqrt[4]{8} e^{-\frac{\pi}{8}} \frac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}},$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 上式的极限为 $2\sqrt[4]{8} e^{-\frac{\pi}{8}} \frac{1}{1 - e^{-\pi}}$. 于是,

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx = \frac{2\sqrt[4]{8} e^{-\frac{\pi}{8}}}{1 - e^{-\pi}}.$$

【2355】 证明等式: $\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx.$

其中 $a > 0, b > 0$ (假定等式左端的积分有意义).

证 设 $ax - \frac{b}{x} = t$, 则当 $0 < x < +\infty$ 时, $-\infty < t < +\infty$, $ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2 + 4ab}$.

将此二式相加得

$$x = \frac{1}{2a} (t + \sqrt{t^2 + 4ab}).$$

* 记号 $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ 理解为极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n S_k$. 以后题解中不再说明.

从而有

$$dx = \frac{1}{2a} \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt.$$

代入要证的等式左端,得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(ax + \frac{b}{x}\right) dx &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^0 f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} - t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} - t + \sqrt{t^2 + 4ab} + t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt, \end{aligned}$$

于是,

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx.$$

【2356】 数

$$M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的平均值. 求下列函数在此区间上的平均值:

$$(1) f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2}); \quad (2) f(x) = \arctan x; \quad (3) f(x) = \sqrt{x} \sin x.$$

解 (1) 由于

$$\int_0^x [\sin^2 \xi + \cos^2(\xi\sqrt{2})] d\xi = \int_0^x \left[\frac{1 - \cos 2\xi}{2} + \frac{1 + \cos(2\xi\sqrt{2})}{2} \right] d\xi = x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin(2x\sqrt{2}),$$

所以,

$$M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x [\sin^2 \xi + \cos^2(\xi\sqrt{2})] d\xi = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{4x} \sin 2x + \frac{1}{4x\sqrt{2}} \sin(2x\sqrt{2}) \right] = 1,$$

$$(2) M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \arctan \xi d\xi = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} = \frac{\pi}{2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2(1+x^2)} = \frac{\pi}{2},$$

(3) 利用第二中值定理,得

$$\int_0^x \sqrt{\xi} \sin \xi d\xi = \sqrt{x} \int_c^x \sin \xi d\xi = \sqrt{x} (\cos c - \cos x) \quad (0 \leq c \leq x).$$

$$\text{于是, } M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{\xi} \sin \xi d\xi = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos c - \cos x}{\sqrt{x}} = 0.$$

【2357】 求:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{a+1}} dt,$$

其中 $a > 0$, $f(t)$ 为闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数.

$$\text{解 (1) 由于 } 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1, \text{ 所以, } \int_x^1 \frac{1 - \frac{t^2}{2}}{t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{dt}{t^2},$$

$$\text{计算得 } -\frac{3}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leq \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \leq -1 + \frac{1}{x}. \text{ 又由于}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{及} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = 1,$$

故最后得到 $\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt = 1$;

(2) 由于 $t^2 < \sqrt{1+t^4}$, 所以, $\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt \geq \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$, 从而, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt \rightarrow +\infty$. 利用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3};$$

(3) 由于 $\lim_{t \rightarrow +0} t(t^{-1}e^{-t}) = 1$, 故广义积分 $\int_0^{+\infty} t^{-1}e^{-t} dt$ 发散. 从而, 所求的极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式. 利用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-e^{-x}x^{-1}}{-\frac{1}{x}} = 1;$$

(4) 由于 $f(t)$ 在 $t=0$ 处右连续, 故对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta' > 0$, 使当 $0 < t < \delta'$ 时, 有 $|f(t) - f(0)| < \frac{a\epsilon}{2}$. 今又取 $0 < \delta < \delta'$, 使当 $0 < x < \delta$ 时, 有

$$\left| x^a \int_{\delta'}^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{a+1}} dt \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

于是, 当 $0 < x < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned} \left| x^a \int_x^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{a+1}} dt \right| &= \left| x^a \int_x^{\delta'} \frac{f(t) - f(0)}{t^{a+1}} dt + x^a \int_{\delta'}^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{a+1}} dt \right| \\ &\leq \frac{a\epsilon}{2} x^a \int_x^{\delta'} \frac{dt}{t^{a+1}} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} x^a \left(\frac{1}{x^a} - \frac{1}{\delta'^a} \right) + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{a+1}} dx = 0,$$

最后得到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{a+1}} dt &= \lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(0)}{t^{a+1}} dt = \lim_{x \rightarrow +0} x^a f(0) \left[-\frac{1}{a} t^{-a} \right] \Big|_x^1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} x^a f(0) \left(\frac{1}{ax^a} - \frac{1}{a} \right) = \frac{f(0)}{a}. \end{aligned}$$

*) 原题(3)、(4)中 $x \rightarrow +0$ 误印为 $x \rightarrow 0$.

研究下列积分的收敛性:

【2358】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}.$

提示 注意当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $x^2 \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \rightarrow 1$.

解 由于 $x^2 \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时), 所以, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ 收敛.

【2359】 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}.$

提示 注意当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $x^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}} \rightarrow 1$.

解 由于 $x^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时), 所以, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}$ 收敛.

【2360】 $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$

提示 注意由 $(1-x) \frac{1}{-\ln x} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow 1-0$), 即知 $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ 发散. 从而, 原积分也发散.

解 当 $0 < x < 1$ 时, $\ln x < 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \frac{1}{-\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-1}{-\frac{1}{x}} = 1$,

所以, 积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ 发散, 从而, 积分 $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$ 也发散.

【2361】 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$

解题思路 先将原积分分成

$$\text{原式} = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

对于上式右端第一个积分, 只要注意当 $x \rightarrow +0$ 时, $x^{1-p}(x^{p-1}e^{-x}) \rightarrow 1$; 而对于第二个积分, 只要注意当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $x^2(x^{p-1}e^{-x}) \rightarrow 0$. 从而, 当 $p > 0$ 时, 原积分收敛.

解 将积分分成

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

对于积分 $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$, 由于 $x^{1-p}(x^{p-1}e^{-x}) \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +0$ 时), 故当 $p > 0$ 时 (从而 $1-p < 1$), 积分 $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ 收敛.

对于积分 $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$. 由于

$$x^2(x^{p-1}e^{-x}) = \frac{x^{p+1}}{e^x} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故对于一切 p 值, 积分 $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ 恒收敛.

于是, 当 $p > 0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ 收敛.

【2362】 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$

解 将积分分成

$$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$$

对于积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{-q} x^p \ln^q \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^p \left(\frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} \right)^q = \left(\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} \right)^q = \left[\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-1} \right]^q = 1,$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 当 $-q < 1$ (即 $q > -1$) 时收敛, 当 $-q \geq 1$ (即 $q \leq -1$) 时发散. 于是, 当 $q \leq -1$ 时, 积分 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 必发散. 故下面可在 $q > -1$ 的假定下来讨论 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$.

若 $p > -1$, 可取 $\tau > 0$ 充分小, 使 $p - \tau > -1$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{-p+\tau} x^p \ln^q \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\ln \frac{1}{x} \right)^q}{\left(\frac{1}{x} \right)^\tau} = 0.$$

由于 $-p + \tau < 1$, 故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 收敛;

若 $p \leq -1$ (设 $q > -1$), 则

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx \geq \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1} \ln^q \frac{1}{x} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^q d \left(\ln \frac{1}{x} \right) = - \frac{\left(\ln \frac{1}{x} \right)^{q+1}}{q+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = +\infty.$$

故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 发散.

总之, 仅当 $p > -1$ 且 $q > -1$ 时, 积分 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 收敛.

【2363】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$

解题思路 仿 2361 题, 有 原式 $= \int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx.$

对于上式右端第一个积分, 只要注意当 $x \rightarrow +0$ 时, $x^{-n} \frac{x^m}{1+x^n} \rightarrow 1$; 而对于第二个积分, 只要注意当

$x \rightarrow +\infty$ 时, $x^{n-m} \frac{x^m}{1+x^n} \rightarrow 1.$

从而, 当 $m > -1$ 且 $n-m > 1$ 时, 原积分收敛.

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx$. 由于

$$x^{-n} \frac{x^m}{1+x^n} \rightarrow 1 \quad (\text{当 } x \rightarrow +0 \text{ 时}),$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 仅当 $-m < 1$, 即仅当 $m > -1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$. 由于 $x^{n-m} \frac{x^m}{1+x^n} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时),

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 仅当 $n-m > 1$ 时收敛.

于是, 当 $m > -1$ 且 $n-m > 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ ($n \geq 0$) 收敛.

【2364】 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx \quad (a \neq 0).$

解 由于 $\arctan ax = -\arctan(-ax)$, 故可设 $a > 0$, 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{\arctan ax}{x^n} dx$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{n-1} \frac{\arctan ax}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arctan ax}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{a}{1+a^2 x^2}}{1} = a,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{\arctan ax}{x^n} dx$ 仅当 $n-1 < 1$ 即当 $n < 2$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx$. 由于

$$x^n \frac{\arctan ax}{x^n} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx$ 仅当 $n > 1$ 时收敛.

于是, 当 $1 < n < 2$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx$ ($a \neq 0$) 收敛.

【2365】 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$

解 先考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$. 当 $n > 1$ 时, 取 $a > 0$ 充分小, 使 $n-a > 1$. 由于

$$x^{n-a} \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \frac{\ln(1+x)}{x^a} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 收敛. 当 $n \leq 1$ 时, 由于

$$x^n \frac{\ln(1+x)}{x^n} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 发散.

再考虑积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$. 由于 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{n-1} \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

故积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 仅当 $n-1 < 1$ 即当 $n < 2$ 时收敛.

于是, 当 $1 < n < 2$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 收敛.

【2366】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx \quad (n \geq 0).$

解题思路 仿 2361 题, 有

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx.$$

对于上式右端第一个积分, 只要注意当 $x \rightarrow +0$ 时, $x^{-m-1} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} \rightarrow \frac{1}{2}$; 而对于第二个积分, 只要注

意当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $x^{n-m} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

从而, 当 $m > -2$ 且 $n-m > 1$ 时, 原积分收敛.

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx$.

由于 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{-m-1} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2},$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx$ 仅当 $-m-1 < 1$ 即当 $m > -2$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx$. 由于

$$x^{n-m} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} = \frac{x^n \arctan x}{2+x^n} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx$ 仅当 $n-m > 1$ 时收敛.

于是, 当 $m > -2$ 且 $n-m > 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx \quad (n \geq 0)$ 收敛.

【2367】 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$

解 当 $a \neq 0$ 时, 设 $f(x) = \cos ax, g(x) = \frac{1}{1+x^n}$, 则对于任意的 $A > 0$, 均有 $\left| \int_0^A f(x) dx \right| \leq \frac{2}{a}$; 其次, 当 $n > 0$ 时, $g(x)$ 单调下降且趋于零 ($n \rightarrow +\infty$). 从而得知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$ 收敛. 至于当 $n=0$ 时, 积分显然发散.

当 $a=0$ 时, 由于 $x^n \frac{1}{1+x^n} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时), 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$ 仅当 $n > 1$ 时收敛.

于是, 当 $a \neq 0, n > 0$ 及 $a=0, n > 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$ 收敛.

【2368】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$

解题思路 首先, 注意到 $\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x} \right).$

其次,易证 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ 收敛. 而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 发散. 于是, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散, 从而, 原积分也发散.

解 方法 1:
$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x} \right).$$

积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 显然发散.

又因对于任意的 $A > 1$, $\left| \int_1^A \cos 2x dx \right| \leq 2$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 单调地趋于零, 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ 收敛.

于是, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散, 从而, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散.

方法 2:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{t + n\pi} dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

由于不论 N 取多大, 只要取 $p = N$, 就有

$$\sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > \underbrace{\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N}}_{N \uparrow} = \frac{1}{2N} N = \frac{1}{2},$$

故递增数列 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ($n=1, 2, \dots$) 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 是 $+\infty$, 即 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

于是, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散.

【2369】
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$. 对于任何 q 值, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^p \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^p \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\cos^q x} \right) = 1,$$

故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 仅当 $p < 1$ (q 为任意值) 时收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$. 对于任何 p 值, 由于

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^q \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \right)^q \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{1}{\sin^p x} \right) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^q = 1,$$

故积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 仅当 $q < 1$ (p 为任意值) 时收敛.

于是, 当 $p < 1$ 且 $q < 1$ 时, 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 收敛.

【2370】
$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 由于 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(x^{-n} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 1$, 故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 仅当 $-n < 1$ 即当 $n > -1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 对于任意的 n , 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sqrt{1-x} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 恒收敛.

于是, 当 $n > -1$ 时, 积分 $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

【2371】 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$. 不妨设 $\min(p, q) = p$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(x^p \frac{dx}{x^p + x^q} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + x^{q-p}} = 1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 仅当 $p < 1$, 即当 $\min(p, q) < 1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$. 不妨设 $\max(p, q) = q$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^q \frac{1}{x^p + x^q} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{-(q-p)} + 1} = 1,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 仅当 $q > 1$ 即当 $\max(p, q) > 1$ 时收敛.

于是, 当 $\min(p, q) < 1$ 且 $\max(p, q) > 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 收敛.

【2372】 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$. 由于 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{x} \frac{\ln x}{1-x^2} \right) = 0$, 故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sqrt{1-x} \frac{\ln x}{1-x^2} \right) = 0$, 故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 收敛.

于是, 积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 收敛.

【2373】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow +0} \left[x^{\frac{3}{8}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \left[\left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{\sin x} \ln(\sin x) \right] = 0$,

故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$ 收敛.

【2374】 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$

解 先考虑 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. 对于任意的 p , 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \left[(x-1)^q \frac{1}{x^p \ln^q x} \right] = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left[\frac{1}{x^p} \left(\frac{x-1}{\ln x} \right)^q \right] = \left(\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{\ln x} \right)^q = \left(\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{\frac{1}{x}} \right)^q = 1,$$

故积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 仅当 $q < 1$ 且 p 为任意值时收敛.

再考虑积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. 如果 $p > 1$, 取 $a > 0$ 充分小, 使 $p-a > 1$, 则对于任意的 q , 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{p-a} \frac{1}{x^p \ln^q x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^a \ln^q x} \right) = 0,$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 收敛; 如果 $p \leq 1$, $q < 1$, 由于

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \geq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q} \Big|_2^{+\infty} = +\infty,$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 发散.

于是,当 $p > 1$ 且 $q < 1$ 时,积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 收敛.

【2375】 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$.

解 先考虑积分 $\int_e^3 \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$, 对于任意的 p 和 q , 由于

$$\lim_{x \rightarrow e+0} \frac{(x-e)^r}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} = \frac{1}{e^p} \left(\lim_{x \rightarrow e+0} \frac{x-e}{\ln \ln x} \right)^r = \frac{1}{e^p} \left(\lim_{x \rightarrow e+0} \frac{1}{\frac{1}{x \ln x}} \right)^r = e^{r-p},$$

故积分 $\int_e^3 \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$ 仅当 $r < 1$ 和 p, q 为任意值时收敛.

再考虑积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$, 分三种情形讨论:

(1) 如果 $p > 1$, q 和 r 为任意值. 取 $a > 0$ 充分小, 使 $p-a > 1$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p-a}}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} = 0,$$

故此时积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$ 收敛;

(2) 当 $p=1$ 时, 则有

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dx}{x^q (\ln x)^r},$$

利用 2374 题的结果得知, 当 $p=1, q > 1$ 和 $r < 1$ 时, 积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$ 收敛;

(3) 当 $p < 1$ 时, 取 $\delta > 0$ 充分小, 使 $p+\delta < 1$. 对于任意的 q 和 r , 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+\delta}}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\delta}{(\ln x)^q (\ln \ln x)^r} = +\infty,$$

故此时积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$ 发散.

于是, 当 $p > 1, q$ 是任意的, $r < 1$ 和当 $p=1, q > 1, r < 1$ 时, 积分 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$ 收敛.

【2376】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \cdots |x-a_n|^{p_n}} \quad (a_1 < a_2 < \cdots < a_n).$

解 首先, 被积函数关于 $\frac{1}{x}$ 是 $\sum_{i=1}^n p_i$ 级无穷小 (当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时).

其次,

$$\lim_{x \rightarrow a_i} \left(|x-a_i|^{p_i} \frac{1}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \cdots |x-a_n|^{p_n}} \right) = c_i, \quad (0 < c_i < +\infty, (i=1, 2, \cdots, n)),$$

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \cdots |x-a_n|^{p_n}} dx$ 当 $\sum_{i=1}^n p_i > 1$ 且 $p_i < 1 (i=1, 2, \cdots, n)$ 时收敛.

【2377】 $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$. 式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为次数分别为 m 及 n 的互素的多项式.

解 当 $P_n(x)=0$ 在 $[0, +\infty)$ 上有根 λ 并设其重数为 $r (\geq 1)$ 时, 由于 $P_n(x)$ 与 $P_m(x)$ 互素, 故 λ 不是 $P_m(x)$ 的根. 从而有

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} \left[(x-\lambda)^r \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right] = a \neq 0,$$

而且显然在点 λ 的右(左)近旁, $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 都保持定号. 由于 $r \geq 1$, 故积分发散. 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^{n-m} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right] = b \neq 0$,

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$ 仅当 $n-m > 1$ 即当 $n > m+1$ 时收敛.

于是,当 $P_n(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内无根且 $n > m+1$ 时,积分 $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$ 收敛.

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性:

【2378】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

解题思路 易证积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛,而积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 显然收敛,故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛.

其次,由 $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x}$ ($x > 0$) 及 2368 题的结果可知,原积分不是绝对收敛的.

解 对于任意的 $A > 1$, 由于 $\left| \int_1^A \sin x dx \right| \leq 2$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 单调地趋于零, 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛. 而积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 是普通的定积分 ($\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 有可去不连续点, 故补充定义其值为 1 后, $\frac{\sin x}{x}$ 可视为 $[0, 1]$ 上的连续函数), 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛. 但它不是绝对收敛的.

事实上, 当 $x > 0$ 时, $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x}$, 由 2368 题知, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散, 故积分 $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ 发散.

【2379】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx.$

解 对于任意的 $A > 0$, 由于 $\left| \int_0^A \cos x dx \right| \leq 2$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ 单调地趋于零, 因此, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$ 收敛. 但它不是绝对收敛的.

事实上, 由于

$$\frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} \geq \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+100} - \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} \right),$$

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x+100} \right) = 1$, 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx$ 发散. 仿照前半段证明, 可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} dx$ 收敛. 从而, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} dx$ 发散.

于是, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} dx$ 发散.

【2380】 $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx \quad (q \neq 0).$

解 设 $t = x^q$, 则 $dx = \frac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} dt$. 于是,

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx = \frac{1}{|q|} \int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt.$$

先考虑积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$. 由于

$$\lim_{t \rightarrow +0} (t^{-\frac{p+1}{q}} \cdot t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

故积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 仅当 $-\frac{p+1}{q} < 1$, 即当 $\frac{p+1}{q} > -1$ 时收敛. 又由于被积函数在 $[0, 1]$ 上非负, 故也是绝对收敛的.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$. 如果 $\frac{p+1}{q} < 1$, 则由于对任意的 $A > 1$, $\left| \int_1^A \sin t dt \right| \leq 2$ 且 $t^{\frac{p+1}{q}-1}$ 单调地趋于零 (当 $t \rightarrow +\infty$ 时), 故此时积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 收敛. 如果 $\frac{p+1}{q} = 1$, 则积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 显然发散.

从而,积分 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 也发散. 如果 $\frac{p+1}{q} > 1$, 则由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} = +\infty$, 故对任给的 $A > 0$, 总存在正整数 N , 使有 $2N\pi + \frac{\pi}{4} > A$, 且当 $t > 2N\pi + \frac{\pi}{4}$ 时, $t^{\frac{p+1}{q}-1} > \sqrt{2}$.

今取 $A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}$, $A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$, 则有

$$\left| \int_{A'}^{A''} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt \right| > \sqrt{2} \left| \int_{A'}^{A''} \sin t dt \right| = 1,$$

它不可能小于任给的 ε ($0 < \varepsilon < 1$), 因而, 积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 发散, 从而, 积分 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} t dt$ 也发散.

于是, 仅当 $-1 < \frac{p+1}{q} < 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 收敛, 且当 $\frac{p+1}{q} > -1$ 时, 积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 绝对收敛.

下面我们考虑积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 的绝对收敛性. 分三种情形讨论:

(1) 当 $\frac{p+1}{q} < 0$ 时, 由于

$$\left| t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \right| \leq t^{\frac{p+1}{q}-1} \quad (1 \leq t < +\infty),$$

且 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} dt$ 收敛, 故当 $\frac{p+1}{q} < 0$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 绝对收敛;

(2) 当 $\frac{p+1}{q} = 0$ 时, 由于

$$\int_1^{+\infty} \left| t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \right| dt = \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty$$

故此时积分不绝对收敛(但条件收敛);

(3) 当 $\frac{p+1}{q} > 0$ 时, 由于

$$\int_1^{+\infty} \left| t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \right| dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty,$$

故此时积分也不是绝对收敛的.

于是, 当 $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 绝对收敛.

最后我们得到: 当 $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx$ 绝对收敛; 当 $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$ 时, 积分条件收敛.

【2381】 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx \quad (q \geq 0).$

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{-1-p} \cdot \frac{x^p \sin x}{1+x^q} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+x^q} \right) = 1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 仅当 $-1-p < 1$ 即当 $p > -2$ 时收敛, 且是绝对收敛的.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$.

(1) 若 $p \geq q$, 则对任何 $A > 1$, 必存在正整数 N , 使 $2N\pi + \frac{\pi}{4} > A$ 且当 $x \geq 2N\pi + \frac{\pi}{4}$ 时, 恒有 $\frac{x^p}{1+x^q} > \frac{1}{3}$.

于是, 对 $A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}$, $A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$, 有

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{x^p}{1+x^q} \sin x dx \right| > \frac{1}{3} \int_{A'}^{A''} \sin x dx = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

它不可能小于任给的 ε , 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 发散.

(2) 若 $p < q-1$, 取 $\alpha > 0$ 使 $p+\alpha < q-1$, 即 $q-p-\alpha > 1$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{q-p-\alpha} \frac{x^p}{1+x^q} |\sin x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^q}{1+x^q} \cdot \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \right) = 0,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 绝对收敛.

(3) 现设 $q-1 \leq p < q$. 先证 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$ 发散. 事实上, 此时, 可取 $A_0 > 1$, 使当 $x \geq A_0$ 时, $\frac{x^{p+1}}{1+x^q} > \frac{1}{3}$; 故

$$\int_{A_0}^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx = \int_{A_0}^{+\infty} \left(\frac{x^{p+1}}{1+x^q} \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| \right) dx \geq \frac{1}{3} \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty,$$

从而, $\int_1^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$ 发散.

再证 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 收敛. 事实上, 若 $q=0$, 则 $-1 \leq p < 0$, 此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} x^p \sin x dx$ 显然收敛; 若 $q > 0$, 由于 $\left(\frac{x^p}{1+x^q} \right)' = \frac{x^{p-1} [p - (q-p)x^q]}{(1+x^q)^2} < 0$ (当 x 充分大时), 故当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^p}{1+x^q}$ 单调递减趋于零. 而 $\left| \int_1^A \sin x dx \right| = |\cos 1 - \cos A| \leq 2$ 有界, 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 收敛. 总之, 我们证明了: 当 $q-1 \leq p < q$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 条件收敛.

于是, 最后得结论: 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 当 $p > -2, q > p+1$ 时绝对收敛; 当 $p > -2, p < q \leq p+1$ 时条件收敛.

【2382】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx.$

解 当 $n \leq 0$ 时, 积分显然是发散的.

当 $n > 0$ 时, 首先考虑积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$ ($a > 1$). 由于

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx = \int_a^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} dx,$$

而

$$\left| \int_a^A \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx \right| = \left| \cos\left(a + \frac{1}{a}\right) - \cos\left(A + \frac{1}{A}\right) \right| \leq 2.$$

又当 x 充分大时, 有

$$\frac{d}{dx} x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = nx^{n-3} \left(x^2 - \frac{n-2}{n}\right) > 0,$$

故当 x 充分大时, 函数 $x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ 是递增的, 从而, 函数 $\frac{1}{x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时递减趋于零. 由此可知,

积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$ 当 $n > 0$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_0^{a'} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx$ ($0 < a' < 1$). 设 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\int_0^{a'} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx = \int_{\frac{1}{a'}}^{+\infty} \frac{\sin(t + \frac{1}{t})}{t^{2-n}} dt,$$

由前所述, 此积分仅当 $2-n > 0$ 即当 $n < 2$ 时收敛.

请注意, $\int_{a'}^a \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx$ ($0 < a' < 1 < a$) 是一个通常的积分, 它对任意 n 均有意义. 于是, 当 $0 < n < 2$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx$$

收敛.

可以证明: 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x + \frac{1}{x})|}{x^n} dx$ 当 $0 < n < 2$ 时发散. 事实上,

$$\frac{|\sin(x + \frac{1}{x})|}{x^n} \geq \frac{\sin^2(x + \frac{1}{x})}{x^n} = \frac{1 - \cos(2x + \frac{2}{x})}{2x^n},$$

而当 $0 < n \leq 1$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ 显然发散, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\cos(2x + \frac{2}{x})}{x^n} dx$ 收敛 (仿前半段证明), 故当 $0 < n \leq 1$ 时,

积分 $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin(x + \frac{1}{x})|}{x^n} dx$ 发散, 从而, 当 $0 < n \leq 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x + \frac{1}{x})|}{x^n} dx$ 发散.

对于 $1 < n < 2$ 的情况, 可考虑对积分作变换 $x = \frac{1}{t}$, 则得

$$\int_0^a \frac{|\sin(x + \frac{1}{x})|}{x^n} dx = \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{|\sin(t + \frac{1}{t})|}{t^{2-n}} dt.$$

仿前可知, 当 $0 < 2-n \leq 1$ 即当 $1 \leq n < 2$ 时, 积分

$$\int_0^a \frac{|\sin(x + \frac{1}{x})|}{x^n} dx$$

发散. 从而, 当 $1 < n < 2$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x + \frac{1}{x})|}{x^n} dx$ 发散.

最后我们得到: 当 $0 < n < 2$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx$ 条件收敛.

【2383】 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$, 式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为整多项式, 且若 $x \geq a$, $P_n(x) > 0$.

解 今仿 2381 题解之, 设

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m, \quad P_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

其中 m, n 是非负整数, $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

(1) 若 $n > m+1$, 可取 $a > 0$ 充分小, 使 $n-a > m+1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m-a} \left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^n P_m(x)}{x^n P_n(x)} \right| \frac{|\sin x|}{x^a} = 0,$$

而 $n-m-a > 1$, 故积分 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 绝对收敛.

(2) 若 $n=m+1$. 我们证明此时 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 条件收敛. 事实上, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_0}{b_0}$, 故存在

$A_0 > a$, 使当 $x \geq A_0$ 时, 恒有 $\left| \frac{x P_m(x)}{P_n(x)} \right| > \frac{|a_0|}{2|b_0|}$, 于是,

$$\int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \right| dx = \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{x P_m(x)}{P_n(x)} \right| \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{|a_0|}{2|b_0|} \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty,$$

故 $\int_a^{+\infty} \left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \right| dx$ 发散. 此外, 易知 ($n=m+1$) 时

$$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right)' = \frac{1}{[P_n(x)]^2} \{ -a_0 b_0 x^{2m} - 2a_1 b_0 x^{2m-1} + \cdots + (a_{m-1} b_{m+1} - a_m b_m) \},$$

故若 $a_0 b_0 > 0$, 则当 x 充分大时, $\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right)' < 0$, 函数 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 递减; 若 $a_0 b_0 < 0$, 则当 x 充分大时, $\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right)'$

> 0 , 函数 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 递增. 总之, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 单调地趋于零. 又显然可知 $\left| \int_a^A \sin x dx \right| \leq 2$, 因此, 积分

$\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 收敛.

(3) 若 $n < m+1$. 由于 n, m 都是非负整数, 故 $n \leq m$. 因此,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n=m, \\ +\infty, & n < m \text{ 且 } a_0 b_0 > 0, \\ -\infty, & n < m \text{ 且 } a_0 b_0 < 0. \end{cases}$$

于是, 存在 $A^* > a$ 及 $\tau > 0$, 使当 $x \geq A^*$ 时, $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 保持定号且 $\left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right| > \tau$. 今对任何 $A > a$, 可取正整数

N , 使 $2N\pi + \frac{\pi}{4} \geq \max\{A, A^*\}$. 令 $A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}$, $A'' = 2N\pi + \frac{5\pi}{4}$, 则

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx \right| > \tau \int_{A'}^{A''} \sin x dx = \frac{\tau\sqrt{2}}{2},$$

它不能小于任意的 ϵ ($0 < \epsilon < \frac{\tau\sqrt{2}}{2}$), 故 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 发散.

最后, 我们得出: $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 当 $n > m+1$ 时绝对收敛; 当 $n = m+1$ 时条件收敛.

【2384】 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时是否必有 $f(x) \rightarrow 0$? 研究例子:

$$(1) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx.$$

解 不一定. 例如,

(1) 积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ 收敛. 事实上, 它是 2380 题之特例: $p=0, q=2$. 但是, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x^2)$ 不存在;

(2) 先证积分 $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$ 收敛. 事实上, 对任何 $A > 0$, 存在唯一的非负整数 n , 使 $\sqrt{n} \leq A < \sqrt{n+1}$.

显然 $A \rightarrow +\infty$ 相当于 $n \rightarrow \infty$. 当 $\sqrt{k} \leq x < \sqrt{k+1}$ (k —非负整数) 时, $[x^2] = k$. 于是,

$$\begin{aligned} \int_0^A (-1)^{[x^2]} dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^k dx + (-1)^n (A - \sqrt{n}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} + (-1)^n (A - \sqrt{n}). \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ 递减趋于 0 (当 $k \rightarrow \infty$ 时), 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ 存在有限 (参看 2656 题前面的变号级数的莱布尼茨判别法), 设为 S . 又显然

$$|(-1)^n(A-\sqrt{n})| < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A (-1)^{[x^2]} dx = S$, 因此, 积分 $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$ 收敛. 但显然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x^2]}$ 不存在.

【2385】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义且无界, 可否把函数 $f(x)$ 的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

看作对应积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$$

的极限?

提示 不能.

解 不能. 因为若 $c(a \leq c \leq b)$ 是瑕点, 则对于 $[a, b]$ 的任何分法, 不论其 $\max |\Delta x_i|$ 多么小, 当分法确定以后, 设 $c \in [x_j, x_{j+1}]$, 则总可以取 ξ_j , 使 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ 大于任何预先给定的值. 因此, 当 $\max |\Delta x_i| \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ 不可能具有有限极限.

【2386】 设

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

收敛, 函数 $\varphi(x)$ 有界, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (2)$$

是否必定收敛? 举出适当的例子.

若积分(1)绝对收敛, 问积分(2)的收敛性如何?

解题思路 不一定收敛. 例如, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛, $\varphi(x) = \sin x$ 有界, 但是, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散.

其次, 设 $|\varphi(x)| \leq L$, 则由 $|f(x)\varphi(x)| \leq L|f(x)|$ 及 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 即知 $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx$ 绝对收敛.

解 不一定. 例如, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛^{*)}, 且 $\varphi(x) = \sin x$ 有界, 但是积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 是发散的^{**)} .

若积分(1)绝对收敛, $\varphi(x)$ 有界, 则积分(2)一定是绝对收敛的. 事实上, 设 $|\varphi(x)| \leq L$, 则由不等式

$$|f(x)\varphi(x)| \leq L|f(x)| \quad \text{及} \quad \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

的收敛性即可获证.

*) 利用 2378 题的结果.

**) 利用 2368 题的结果.

【2387】 证明: 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $f(x)$ 为单调函数, 则

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)^{**}.$$

证明思路 不妨设 $f(x)$ 单调递减 (若 $f(x)$ 单调递增, 可用 $-f(x)$ 代替 $f(x)$ 即可). 用反证法易证, 当 $x \geq a$ 时, $f(x) \geq 0$. 任给 $\epsilon > 0$, 由于 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 故存在 $A > a$, 使当 $x > A$ 时, 恒有

$$\left| \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

但是, $\left| \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \right| = \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \geq f(x) \left(x - \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2} f(x),$

故当 $x > A$ 时, $0 \leq xf(x) < \epsilon$. 于是, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$, 即 $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

证 不妨设 $f(x)$ 单调递减. 先证当 $x \geq a$ 时, $f(x) \geq 0$. 若不然, 则存在点 $c \geq a$, 使 $f(c) < 0$. 由于 $f(x)$ 单调递减, 故当 $x \geq c$ 时, $f(x) \leq f(c)$, 从而,

$$\int_c^{+\infty} f(x) dx \leq \int_c^{+\infty} f(c) dx = -\infty.$$

因此, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 这与积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛矛盾. 于是, $f(x)$ 为非负的单调函数.

下面证明 $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$. 由于积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $A > a$, 使当 $x > A$ 时,

恒有
$$\left| \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

但是, $\left| \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \right| = \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \geq f(x) \left(x - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} f(x)$, 故当 $x > A$ 时, $0 \leq x f(x) < \varepsilon$, 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0 \quad \text{或} \quad f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

如果 $f(x)$ 单调递增, 则可考虑 $-f(x)$ (它是单调递减的). 同法可证得 $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

*) 原题为 $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, 现在的结果更好.

【2388】 设函数 $f(x)$ 在区间 $0 < x \leq 1$ 内是单调函数, 且在点 $x=0$ 的邻域内是无界的, 证明: 若 $\int_0^1 f(x) dx$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

证 设函数 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 内是单调递减的. 这时 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$. 先设 $f(x) \geq 0$ ($0 < x \leq 1$ 时). 由于积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 存在, 故把区间 $[0, 1]$ n 等分后, 即得

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx < \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} < \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

另一方面, 又有 $\int_0^1 f(x) dx > \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$. 从而就有

$$0 < \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) < \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

如果不满足 $f(x) \geq 0$, 即 $f(x)$ 可正可负. 则函数 $\varphi(x) = f(x) - f(1)$ 满足 $\varphi(x) \geq 0$ ($0 < x \leq 1$), 且同样是单调递减, $\lim_{x \rightarrow +0} \varphi(x) = +\infty$. 故根据已证的结果, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(x) dx,$$

即
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(1) \right] = \int_0^1 [f(x) - f(1)] dx,$$

由此即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$.

当 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调递增时 (这时 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$), 只需对函数 $-f(x)$ 应用上述结果即获证.

【2389】 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 $0 < x < a$ 内是单调的, 且 $\int_0^a x^p f(x) dx$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0$.

证 不妨设 $f(x)$ 在 $0 < x < a$ 单调递减. 先设存在 $0 < \delta < a$ 使当 $0 < x < \delta$ 时, $f(x) \geq 0$. 这时, 当 $0 < x < \delta$ 时, 有

$$\int_{\frac{x}{2}}^x t^p f(t) dt \geq f(x) \int_{\frac{x}{2}}^x t^p dt = C_p x^{p+1} f(x) \geq 0,$$

其中

$$C_p = \begin{cases} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{p+1}}{p+1}, & p \neq -1, \\ \ln 2, & p = -1. \end{cases}$$

故 C_p 是正的常数. 于是, 由 $\int_0^a x^p f(x) dx$ 存在, 知 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\frac{x}{2}}^x t^p f(t) dt = 0$,

从而,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

再设不存在上述 δ . 于是, 由 $f(x)$ 的递减性知, 当 $0 < x < a$ 时, 恒有 $f(x) < 0$. 于是, 当 $0 < x < \frac{a}{2}$ 时, 有

$$\int_x^{2x} t^p f(t) dt \leq f(x) \int_x^{2x} t^p dt = C_p^* x^{p+1} f(x) < 0,$$

其中

$$C_p^* = \begin{cases} \frac{2^{p+1} - 1}{p+1}, & p \neq -1, \\ \ln 2, & p = -1. \end{cases}$$

故 C_p^* 也是正的常数. 于是, $|x^{p+1} f(x)| < \frac{1}{C_p^*} \left| \int_x^{2x} t^p f(t) dt \right|$.

由 $\int_0^a x^p f(x) dx$ 的存在性知, $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} t^p f(t) dt = 0$, 从而, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{p+1} f(x) = 0$. 证毕.

【2390】 证明: (1) V. P. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$; (2) V. P. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0$; (3) V. P. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$.

提示 从定义出发.

证 (1) 由于 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{1-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{1+\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln \epsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \epsilon) = 0$,

所以, V. P. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$;

(2) 由于

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{1+\epsilon}^b \frac{dx}{1-x^2} \right) &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-\epsilon}{\epsilon} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+b}{1-b} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2+\epsilon}{\epsilon} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{2-\epsilon}{2+\epsilon} \right| = 0, \end{aligned}$$

所以, V. P. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0$;

(3) 由于 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos b + \cos b) = 0$,

所以, V. P. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$.

【2391】 证明: 当 $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$ 时存在 $\operatorname{li} x = \text{V. P.} \int_0^x \frac{d\xi}{\ln \xi}$.

证 当 $0 \leq x < 1$ 时, 由于 $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \xi} = 0$, 故将 $\frac{1}{\ln x}$ 在 $x=0$ 处补充定义后成为连续函数, 于是, 积分存在.

当 $x > 1$ 时, 首先注意到下面这样一个结论: 当 $a < c < b$ 时,

$$\text{V. P.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

其次, 利用具比亚诺型余项的泰勒公式, 有

$$\ln x = (x-1) + [a(x)-1] \frac{(x-1)^2}{2},$$



式中 $\lim_{x \rightarrow 1} a(x) = 0$. 由此即得
$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}[a(x)-1]}{1 + \frac{[a(x)-1]}{2}(x-1)},$$

上式等式右端的第二项在 $x=1$ 的附近保持有界, 且对于任意的 x 值连续, 因而是可积分的. 第一项的“主值”如前所述, 它是存在的.

于是, 当 $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $\operatorname{li} x$ 存在.

*) 原题误为“当 $x \geq 0$ 时, ...”.

求下列积分:

【2392】 $V. P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}.$

提示 注意点 $x=1$ 及 $x=2$ 为被积函数的瑕点, 从而, 由定义即易获解.

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ \eta \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^2-3x+2} + \int_{1+\epsilon}^{2-\eta} \frac{dx}{x^2-3x+2} + \int_{2+\eta}^b \frac{dx}{x^2-3x+2} \right) \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ \eta \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\ln \frac{\epsilon+1}{\epsilon} - \ln 2 + \ln \frac{\eta}{1-\eta} - \ln \frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \ln \left| \frac{b-2}{b-1} \right| - \ln \frac{\eta}{1+\eta} \right) \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ \eta \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\ln \frac{\epsilon+1}{1-\epsilon} - \ln 2 + \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right) = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以, $V. P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \ln \frac{1}{2}.$

【2393】 $V. P. \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x}.$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1-\epsilon} \frac{dx}{x \ln x} + \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [\ln |\ln(1-\epsilon)| - \ln(\ln 2) + \ln(\ln 2) - \ln |\ln(1+\epsilon)|] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{\ln(1-\epsilon)}{\ln(1+\epsilon)} \right| = \ln \left| \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\ln(1-\epsilon)}{\ln(1+\epsilon)} \right| = \ln \left| \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\frac{-1}{1-\epsilon}}{\frac{1}{1+\epsilon}} \right| = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

所以, $V. P. \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x} = 0.$

【2394】 $V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$

解 由于

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\arctan b - \arctan(-b) + \frac{1}{2} \ln(1+b^2) - \frac{1}{2} \ln(1+b^2) \right] = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b = \pi,$$

所以, $V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi.$

【2395】 $V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan x dx.$

解 由于 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \arctan x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[b \arctan b - (-b) \arctan(-b) - \frac{1}{2} \ln(1+b^2) + \frac{1}{2} \ln(1+b^2) \right] = 0,$

所以, $V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan x dx = 0.$

§ 5. 面积的计算法

1° 直角坐标系中的面积 以两条连续的曲线 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ [$y_2(x) \geq y_1(x)$] 与两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ ($a < b$) 为界的图形 $A_1A_2B_2B_1$ (图 4.14), 其面积等于

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

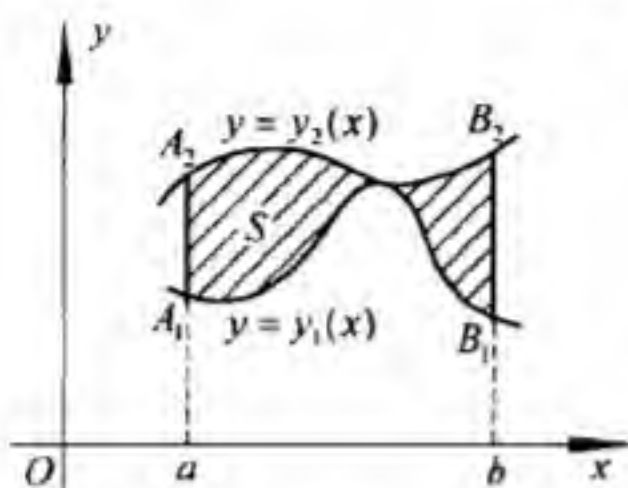


图 4.14

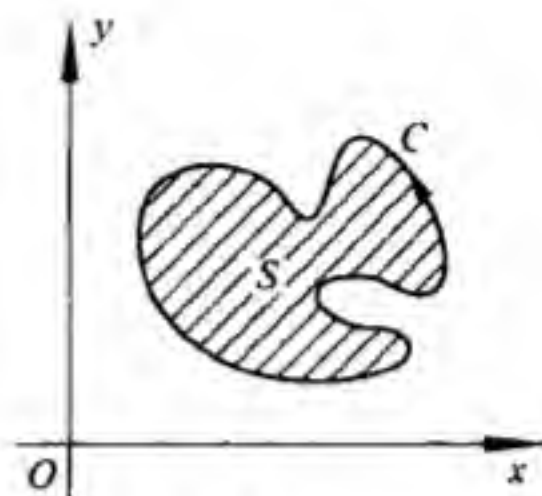


图 4.15

2° 用参数方程给出的曲线所围成的面积 若 $x=x(t)$, $y=y(t)$ ($0 \leq t \leq T$) 为一段光滑的简单封闭曲线 C 的参数方程, 并且沿曲线的环绕方向为逆时针方向, 使得该曲线所围图形总是位于其左侧 (图 4.15), 则此图形的面积 S 等于

$$S = - \int_0^T y(t) x'(t) dt = \int_0^T x(t) y'(t) dt$$

或
$$S = \frac{1}{2} \int_0^T [x(t) y'(t) - x'(t) y(t)] dt.$$

3° 极坐标系中的面积 以连续的曲线 $r=r(\varphi)$ 和两条射线 $\varphi=\alpha$ 和 $\varphi=\beta$ ($\alpha < \beta$) 为界的扇形 OAB (图 4.16), 其面积 S 等于

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi.$$

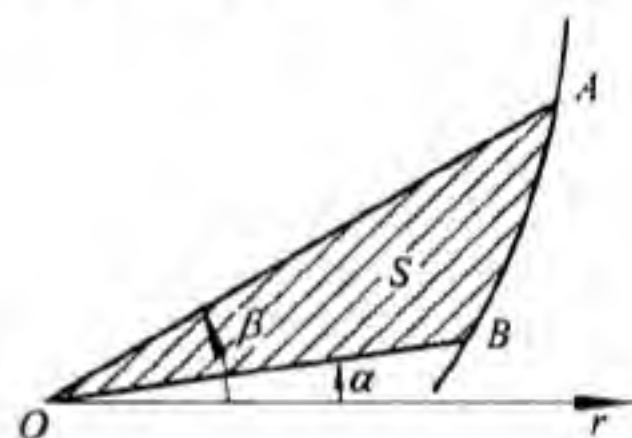


图 4.16

【2396】 证明: 正抛物线弓形的面积等于 $S = \frac{2}{3}bh$, 式中 b 为弓形的底, h 为高 (图 4.17).

提示 易知抛物线的方程为 $y = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h$.

证 设抛物线的方程为 $y = Ax^2 + Bx + C$,

则当 $x = \pm \frac{b}{2}$ 时, 得 $y = \frac{Ab^2}{4} \pm \frac{Bb}{2} + C = 0$;

当 $x = 0$ 时, 得 $y = C = h$. 解之得 $A = -\frac{4h}{b^2}$, $B = 0$.

从而, $y = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h$. 于是, 所求的面积为

$$S = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} \left(h - \frac{4h}{b^2}x^2 \right) dx = 2 \left(hx - \frac{4h}{3b^2}x^3 \right) \Big|_0^{\frac{b}{2}} = \frac{2}{3}bh.$$

求以下列直角坐标方程所给曲线为界的图形的面积*:

【2397】 $ax = y^2$, $ay = x^2$.

解 如图 4.18 所示, 交点为 $A(a, a)$ 及 $O(0, 0)$. 所求的面积为

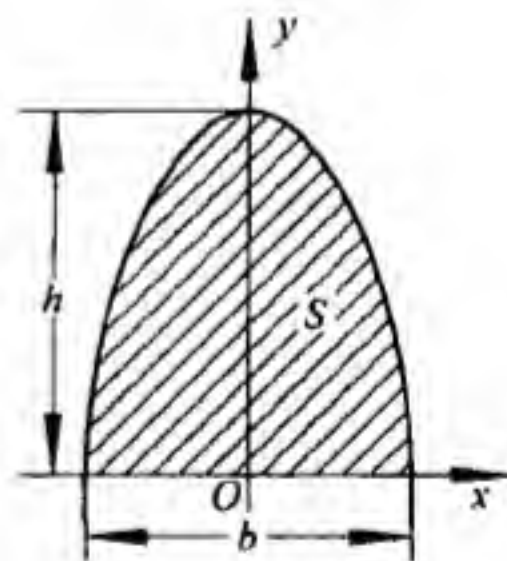


图 4.17

* 在第四章的这一节和以后各节都把一切参数当作是正的.

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left[\frac{2}{3a} (ax)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3a} x^3 \right] \Big|_0^a = \frac{a^2}{3}.$$

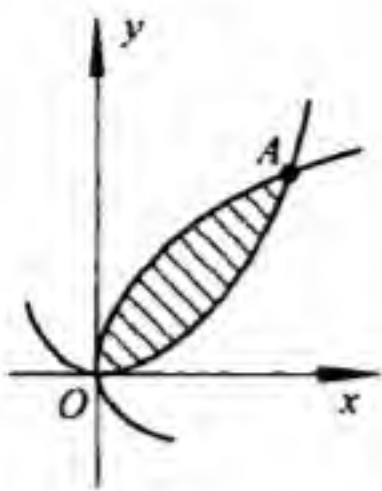


图 4.18

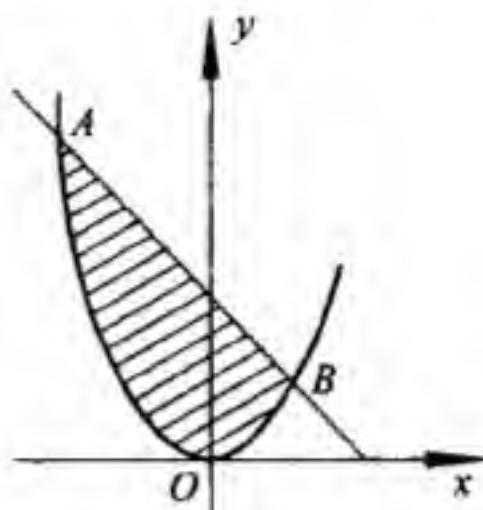


图 4.19

【2398】 $y = x^2$, $x + y = 2$.

解 如图 4.19 所示, 交点为 $A(-2, 4)$ 及 $B(1, 1)$. 所求的面积为

$$S = \int_{-2}^1 [(2-x) - x^2] dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = 4 \frac{1}{2}.$$

【2399】 $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.

解 如图 4.20 所示, 交点为 $A(3, -3)$ 及 $O(0, 0)$. 所求的面积为

$$S = \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)] dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^3 = 4 \frac{1}{2}.$$

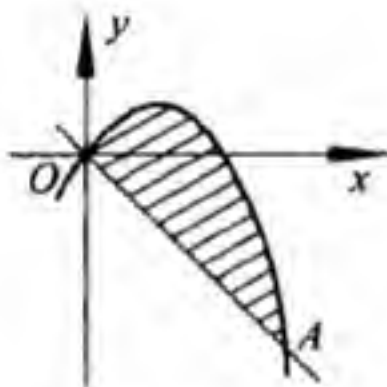


图 4.20

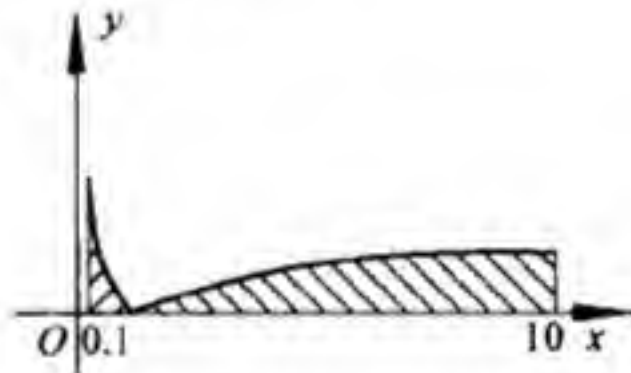


图 4.21

【2400】 $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0.1$, $x = 10$.

解 如图 4.21 所示, 所求的面积为

$$S = -\int_{0.1}^1 \lg x dx + \int_1^{10} \lg x dx = (-x \lg x + x \lg e) \Big|_{0.1}^1 + (x \lg x - x \lg e) \Big|_1^{10} = 9.9 - 8.1 \lg e \approx 6.38.$$

【2401】 $y = x$, $y = x + \sin^2 x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

解 所求的面积为

$$S = \int_0^\pi (x + \sin^2 x - x) dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

【2402】 $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = 0$.

解 所求的面积为

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2 + x^2} dx = 2a^3 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{a^2 + x^2} = 2a^3 \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \arctan \frac{b}{a} = \pi a^2.$$

【2403】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 所求的面积为

$$S = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \left(\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_0^a = \pi ab.$$

【2404】 $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

解 如图 4.22 所示, 图形对称于原点. 所求的面积为

$$S = 4 \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{4}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{4}{3} a^3.$$

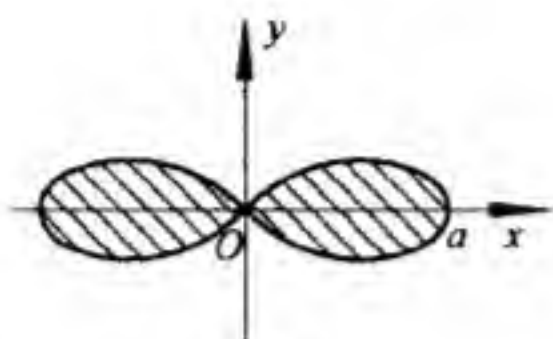


图 4.22

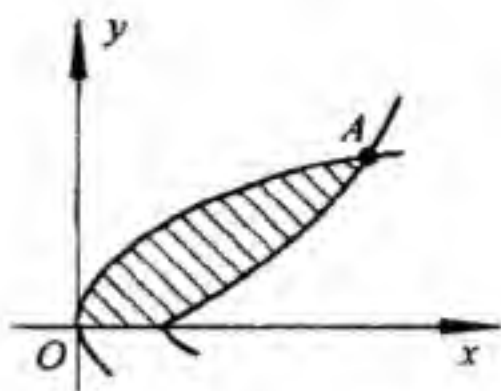


图 4.23

【2405】 $y^2 = 2px, 27py^2 = 8(x-p)^3$.

解 曲线 $L_1: 27py^2 = 8(x-p)^3$ 与曲线 $L_2: y^2 = 2px$ 在第一象限内的交点为 $A(4p, 2\sqrt{2}p)$, 如图 4.23 所示, 所求的面积为

$$S = 2 \int_0^{2\sqrt{2}p} \left[\left(p + \frac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \right) - \frac{1}{2p} y^2 \right] dy = 2 \left(py + \frac{9}{10} p^{\frac{1}{3}} y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{6p} y^3 \right) \Big|_0^{2\sqrt{2}p} = \frac{88}{15} \sqrt{2} p^2.$$

【2406】 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (AC - B^2 > 0)$.

解 解方程, 得

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C} \quad \text{及} \quad y_2 = \frac{-Bx + \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$

当 $B^2x^2 - C(Ax^2 - 1) \geq 0$, 即 $|x| \leq \sqrt{\frac{C}{AC - B^2}}$ 时, y_1 及 y_2 才有实数值. 设 $a = \sqrt{\frac{C}{AC - B^2}}$, 则所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^a (y_2 - y_1) dx = \frac{2}{C} \int_{-a}^a \sqrt{C^2 - (AC - B^2)x^2} dx = \frac{2}{C} \sqrt{AC - B^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{2}{C} \sqrt{AC - B^2} \cdot \frac{\pi}{2} a^2 = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}. \end{aligned}$$

【2407】 $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ (蔓叶线), $x = 2a$.

提示 参阅 272 题的图像. 令 $t = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$, 并利用 1921 题的递推公式.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{2a} x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx = 16a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(t^2+1)^3} dt^{**} = 16a^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{(t^2+1)^3} \right] dt \\ &= 16a^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{8} \arctan t - \frac{5t}{8(t^2+1)} + \frac{t}{4(t^2+1)^2} \right]^{**} \Big|_0^b = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

*) 设 $t = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$.

**) 利用 1921 题的递推公式.

【2408】 $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ (曳物线), $y = 0$.

提示 所求面积为

$$S = 2 \int_0^a \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \right) dy,$$

并注意 $y=0$ 为瑕点.

解 如图 4.24 所示, 所求的面积为

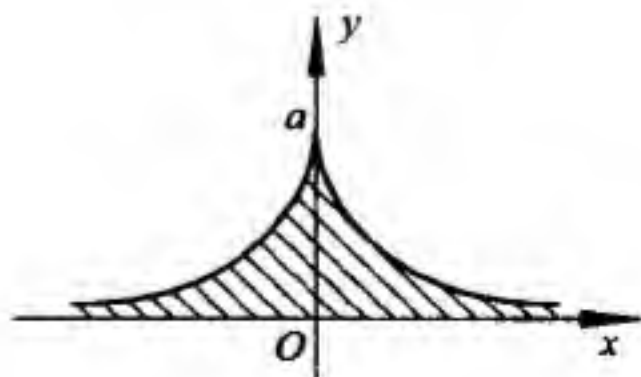


图 4.24

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^a \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \right) dy \\
 &= 2a \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy - 2 \left(\frac{y}{2} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{y}{a} \right) \Big|_0^a \\
 &= 2a \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(y \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + a \arcsin \frac{y}{a} \right) \Big|_{\epsilon}^a - \frac{\pi a^2}{2} = \pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

【2409】 $y^2 = \frac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}$ ($x > 0; n > -2$).

解 所求的面积为

$$S = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}} dx = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{2}{n+2} \cdot \frac{dt}{1+t^2}^{**} = 2 \frac{2}{n+2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan t \Big|_0^b = \frac{2\pi}{n+2}.$$

*) 设 $t = x^{\frac{n+2}{2}}$.

【2410】 $y = e^{-x} \sin x, y = 0$ ($x \geq 0$).

提示 所求的面积为 $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$, 并利用 1829 题的结果.

解 令 $\sin x = 0$, 得 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 当 $x \geq 0$ 时, 由于 $\sin x$ 在 $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi), \dots, ((2k-1)\pi, 2k\pi), \dots$ 中的值为负, 而在 $(0, \pi), (2\pi, 3\pi), \dots, (2k\pi, (2k+1)\pi), \dots$ 中的值为正, 故所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \sin x dx - \dots + (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx + \dots \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{2} [e^{-(k+1)\pi} \cos(k+1)\pi - e^{-k\pi} \cos k\pi] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} (-1)^{k+1} [(-1)^{k+1} e^{-(k+1)\pi} - (-1)^k e^{-k\pi}] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n [e^{-(k+1)\pi} + e^{-k\pi}] \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + 2e^{-\pi} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi} + e^{-(n+1)\pi} \right] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + 2e^{-\pi} \frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} + e^{-(n+1)\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1} = \frac{1}{2} \coth \frac{\pi}{2} \approx 0.545.
 \end{aligned}$$

【2411】 抛物线 $y^2 = 2x$ 把圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的面积分为两部分, 这两部分的比如何?

解 抛物线 $y^2 = 2px$ 和圆 $x^2 + y^2 = 8$ 在第一象限内的交点为 $A(2, 2)$.

设这两部分的面积分别为 S_1 及 S_2 (图 4.25), 则有

$$S_1 = 2 \int_0^2 \left(\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = 2 \left(\frac{y}{2} \sqrt{8-y^2} + \frac{8}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6} y^3 \right) \Big|_0^2 = 2\pi + \frac{4}{3},$$

及
$$S_2 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3} \right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

于是, 它们之比为
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi + \frac{4}{3}}{6\pi - \frac{4}{3}} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$$

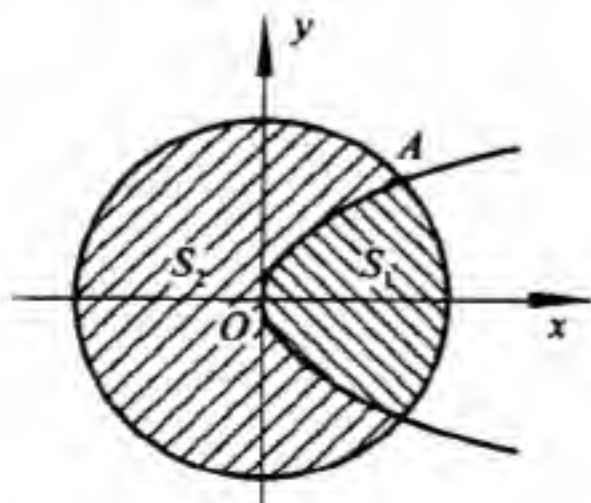


图 4.25

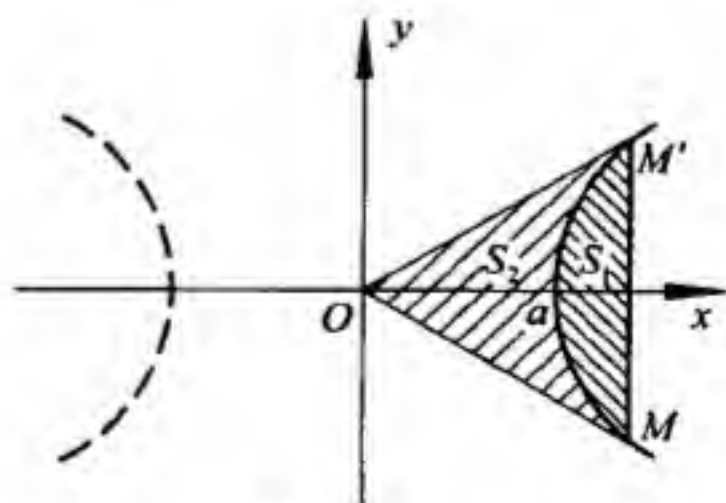


图 4.26

【2412】 把双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$ 上的点 $M(x, y)$ 的坐标表示为双曲线扇形 $OM'M$ 的面积 S 的函数, 此扇形以双曲线的弧 $M'M$ 与二射线 OM 及 OM' 为界, 其中 $M'(x, -y)$ 是点 M 相对于 Ox 轴的对称点.

解 如图 4.26 所示, 则有

$$\frac{S_1}{2} = \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right] \Big|_a^x = \frac{1}{2} xy - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x+y}{a}$$

及 $S_2 = 2 \left(\frac{xy}{2} - \frac{S_1}{2} \right) = a^2 \ln \frac{x+y}{a}.$

若记 $S_2 = S$, 则由上式得

$$x + y = ae^{\frac{S}{a^2}}. \quad (1)$$

以(1)式代入 $x^2 - y^2 = a^2$ 中, 易得

$$x - y = ae^{-\frac{S}{a^2}}. \quad (2)$$

由(1)式及(2)式, 解得

$$x = a \frac{e^{\frac{S}{a^2}} + e^{-\frac{S}{a^2}}}{2} = a \operatorname{ch} \frac{S}{a^2} \quad \text{及} \quad y = a \frac{e^{\frac{S}{a^2}} - e^{-\frac{S}{a^2}}}{2} = a \operatorname{sh} \frac{S}{a^2}.$$

求下列参数方程所给曲线所围图形的面积:

【2413】 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (摆线) 及 $y = 0$.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

由此可见, 所求摆线一拱的面积等于原来母圆面积的三倍.

【2414】 $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

解 当 $t = 0$ 及 2 时, $x = 0$, $y = 0$; 当 $0 < t < 2$ 时, $x > 0$, $y > 0$; 当 $t < 0$ 时, $x < 0$, $y > 0$; 当 $t > 2$ 时, $x < 0$, $y < 0$. 如图 4.27 所示, 所求的面积为

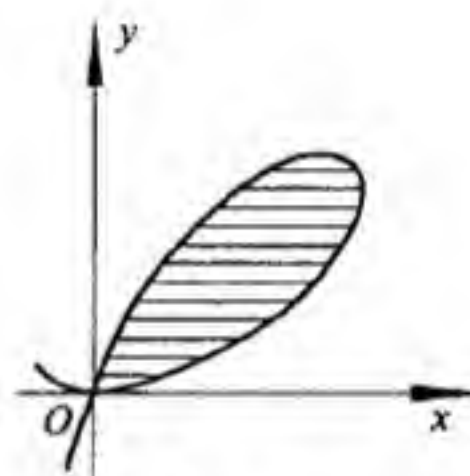


图 4.27

$$S = - \int_0^2 (2t^2 - t^3) 2(1 - t) dt = -2 \int_0^2 (t^4 - 3t^2 + 2t^3) dt = \frac{8}{15}.$$

【2415】 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ [$0 \leq t \leq 2\pi$] (圆的渐伸线) 及 $x = a$, $y \leq 0$.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^{2\pi} a(\sin t - t \cos t) a t \cos t dt - \int_{AB} y dx \\ &= a^2 \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 \sin 2t + \frac{1}{2}t \cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_{AB} y dx = \frac{a^2}{3} (4\pi^3 + 3\pi) - \int_{AB} y dx, \end{aligned}$$

其中 $\int_{AB} y dx$ 表沿着从点 $A(a, -2\pi a)$ 到点 $B(a, 0)$ 的直线 \overline{AB} 上的积分. 由于在 \overline{AB} 上 $x \equiv a$, 故 $dx = 0$. 从而, $\int_{AB} y dx = 0$.

于是, 得 $S = \frac{a^2}{3} (4\pi^3 + 3\pi).$

【2416】 $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y'_t - y x'_t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(2\cos t - \cos 2t)a(2\cos t - 2\cos 2t) - a(2\sin t - \sin 2t)a(-2\sin t + 2\sin 2t)] dt \\ &= 3a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t) dt = 3a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = 6\pi a^2. \end{aligned}$$

【2417】 $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ ($c^2 = a^2 - b^2$) (椭圆的渐屈线).

解 如图 4.28 所示, 所求的面积为

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2}{b} \sin^3 t \frac{3c^2}{a} \cos^2 t \sin t dt = \frac{12c^4}{ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t (1 - \sin^2 t) dt \\ = \frac{3\pi c^4}{8ab}.$$

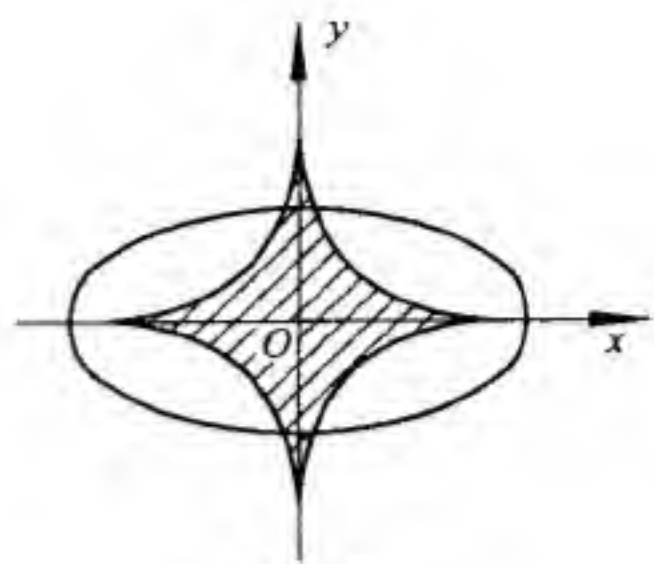


图 4.28

求下列极坐标方程所给曲线所围图形 S 的面积:

【2418】 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (双纽线).

解 如图 4.29 所示, 所求的面积为

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2.$$

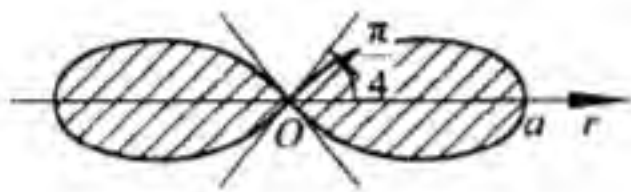


图 4.29

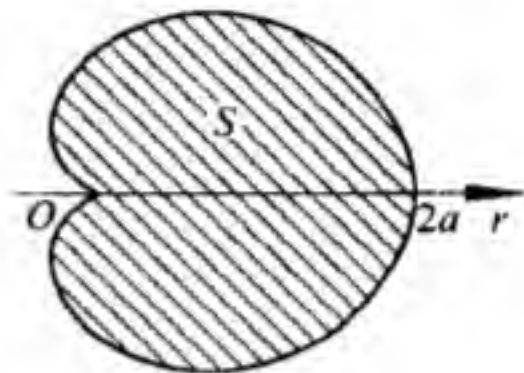


图 4.30

【2419】 $r = a(1 + \cos \varphi)$ (心脏线).

解 如图 4.30 所示, 所求的面积为

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

【2420】 $r = a \sin 3\varphi$ (三叶线).

解 如图 4.31 所示, 所求的面积为

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{\pi a^2}{4}.$$

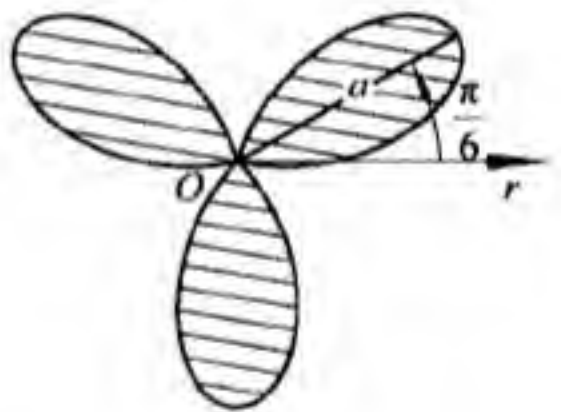


图 4.31

【2421】 $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ (抛物线), $\varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}.$

解 所求的面积为

$$S = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^2}{(1 - \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{p^2}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{p^2}{4} \left(\cot \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \cot^3 \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{p^2}{6} (4\sqrt{2} + 3)^{*}).$$

$$*) \cot \frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}.$$

【2422】 $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$ ($0 < \epsilon < 1$) (椭圆).

解 所求的面积为

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{p^2 d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} = p^2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2}.$$

设 $\tan \frac{\varphi}{2} = t$, 并记 $a^2 = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$, 则有

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} = \int \frac{2(t^2 + 1)dt}{(1 - \epsilon)^2 (t^2 + a^2)^2} = \frac{2}{(1 - \epsilon)^2} \int \frac{dt}{t^2 + a^2} + \frac{2(1 - a^2)}{(1 - \epsilon)^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2} \\ = \frac{2}{a(1 - \epsilon)^2} \arctan \frac{t}{a} + \frac{2(1 - a^2)}{(1 - \epsilon)^2} \left\{ \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{t}{a} \right\}^{**} + C.$$

当 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 时, $0 \leq t < +\infty$, 从而得一广义积分. 于是, 经计算得

$$S = \left\{ \frac{\pi}{a(1-\epsilon)^2} + \frac{(1-a^2)\pi}{2a^3(1-\epsilon)^2} \right\} p^2 = \frac{\pi p^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

【2423】 $r = a \cos \varphi$, $r = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$ $\left[M\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in S \right]$.

解 如图 4.32 所示,

$$|OA| = a, \quad a = -\frac{\pi}{4},$$

阴影部分即为所求的面积.

曲线 $L_1: r = a \cos \varphi$, $L_2: r = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$. 所求的面积为

$$S = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 a^2 (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2(\pi-1)}{4}.$$

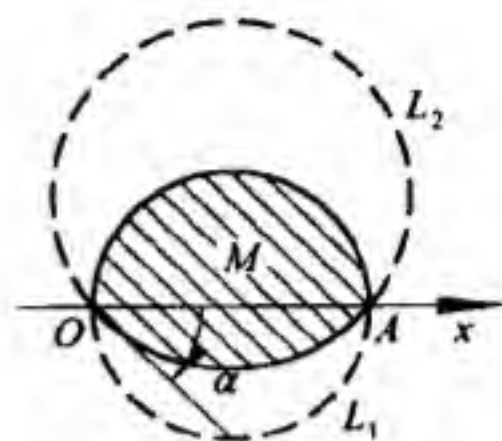


图 4.32

【2424】⁺ 求由曲线 $\varphi = r \arctan r$ 及二射线 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 所围成之扇形的面积.

解 当 φ 由 0 变到 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, r 从 0 变到 $\sqrt{3}$, 而

$$d\varphi = \left(\frac{r}{1+r^2} + \arctan r \right) dr.$$

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{r^3}{1+r^2} + r^2 \arctan r \right) dr = \left[\frac{1}{6} r^2 - \frac{1}{6} \ln(1+r^2) + \frac{1}{6} r^3 \arctan r \right] \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{6} \pi. \end{aligned}$$

【2425】 求封闭曲线 $r = \frac{2at}{1+t^2}$, $\varphi = \frac{\pi t}{1+t^2}$ 所围图形的面积.

解 当曲线封闭时, t 由 0 变化到 $+\infty$, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} r^2 d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} dt \\ &= 2\pi a^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ \int_0^b \frac{dt}{4(1+t)^2} - \frac{1}{4} \int_0^b \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{t dt}{(1+t^2)^2} \right\} \\ &= 2\pi a^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{4} \arctan t - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right\} \Big|_0^b = \pi a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

变为极坐标, 求下列曲线所围图形的面积:

【2426】 $x^3 + y^3 = 3axy$ (笛卡儿叶形线).

提示 注意 $r = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 并令 $\tan \varphi = t$.

解 $r^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 3a r^2 \cos \varphi \sin \varphi$, 于是, $r = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$.

当 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $r \geq 0$, 且当 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $r = 0$. 所以, 从 $\varphi = 0$ 到 $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

叶形线位于第一象限部分所围成的面积, 即为所要求的面积 (图 4.33)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} = \frac{9a^2}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-1}{3(1+t^3)} \Big|_0^b \\ &= \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$

*) 设 $\tan \varphi = t$.

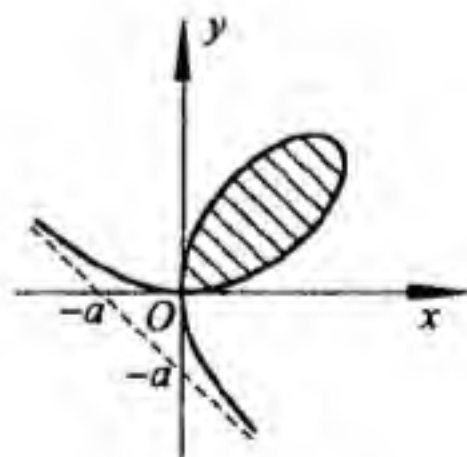


图 4.33

【2427】 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

提示 注意 $r = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2 - \sin^2 2\varphi}}$. 由于图像关于 x 轴及 y 轴均对称, 故所求面积为

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2a^2}{2 - \sin^2 2\varphi} d\varphi.$$

解 $r^4(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = a^2 r^2$, 于是, $r = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2 - \sin^2 2\varphi}}$.

如图 4.34 所示, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2a^2}{2 - \sin^2 2\varphi} d\varphi \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 - \sin^2 t} dt = \frac{2a^2}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2} - \sin t} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sin t} \right) dt \\ &= \sqrt{2}a^2 \left\{ 2\arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{t}{2} - 1\right) + 2\arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{t}{2} + 1\right) \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\sqrt{2}a^2 \{ \arctan(\sqrt{2} - 1) + \arctan(\sqrt{2} + 1) \} = 2\sqrt{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi a^2. \end{aligned}$$

【2428】 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ (双纽线).

解 $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ (图 4.35), 所求的面积为

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin 2\varphi d\varphi = a^2.$$

用参数方程的形式给出下列曲线, 再求曲线所围图形的面积:

【2429】 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (星形线).

提示 令 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, 它对应于四分之一的面积.

解 设 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$,

其中 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, 它对应于四分之一的面积. 所求的面积为其四倍, 即

$$S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-3a^2 \sin^4 t \cos^2 t) dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

【2430】 $x^4 + y^4 = ax^2 y$.

提示 令 $y = tx$.

解 设 $y = tx$, 则曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{at}{1+t^4}, \\ y = \frac{at^2}{1+t^4}. \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

利用对称性知, 所求的面积为

$$S = -2 \int_0^{+\infty} \frac{at^2}{1+t^4} \cdot \frac{a(1-3t^4)}{(1+t^4)^2} dt = -2a^2 \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt - 3 \int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^3} dt \right).$$

因为

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m} = \frac{x^{n+1}}{(n+1-4m)b(a+bx^4)^{m-1}} - \frac{(n-3)a}{b(n+1-4m)} \int \frac{x^{n-4}}{(a+bx^4)^m} dx,$$

所以,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^4)^3} dt = -\frac{t^3}{5(1+t^4)^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{3}{5} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt = \frac{3}{5} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt,$$

于是, $S = \frac{8}{5}a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt$. 又因

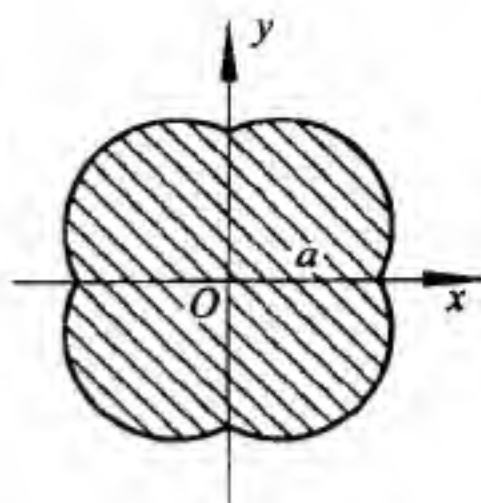


图 4.34

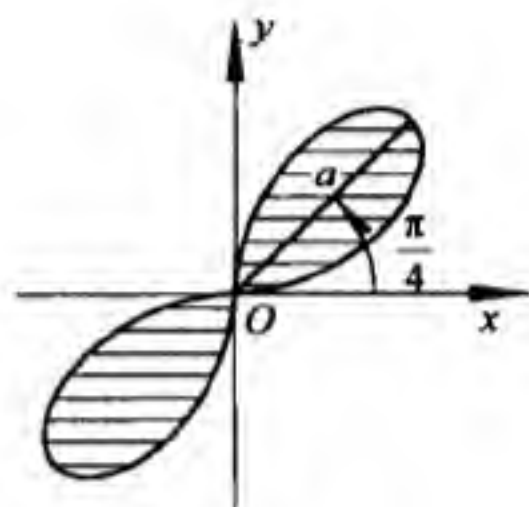


图 4.35

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m} = \frac{x^{n+1}}{4a(m-1)(a+bx^4)^{m-1}} + \frac{4m-n-5}{4a(m-1)} \int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^{m-1}}, \quad \dots$$

所以,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt &= \frac{t^3}{8(1+t^4)^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{5}{8} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt = \frac{5}{8} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt \\ &= \frac{5}{8} \left[\frac{t^3}{4(1+t^4)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4} \right] = \frac{5}{32} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt. \end{aligned}$$

于是, $S = \frac{1}{4} a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$. 利用

$$\int \frac{x^2}{a+bx^4} dx = \frac{1}{4b\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{x^2 - \sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{2}x + \sqrt{\frac{a}{b}}}{x^2 + \sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{2}x + \sqrt{\frac{a}{b}}} + 2\arctan \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{2}x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x^2} \right\} \quad (ab>0), \quad \dots$$

即得
$$\int \frac{t^2}{1+t^4} dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + 2\arctan \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right\} + C.$$

考虑到上述式子右端的函数 $\arctan \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 中的 $t=1$ 点不连续, 并且

$$\lim_{t \rightarrow 1+0} \arctan \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{及} \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} \arctan \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} = \frac{\pi}{2},$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt &= \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + 2\arctan \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right\} \Big|_0^1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + 2\arctan \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right\} \Big|_1^{+\infty} \\ &= \frac{2}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}, \end{aligned}$$

最后得所求的面积为

$$S = \frac{\sqrt{2}\pi}{16} a^2.$$

*) 参阅“函数表与积分表”(H. M. 雷日克, H. C. 格拉德什坦)第64页“(2.133)2”.

**) 参阅同书第64页“(2.133)1”.

***) 参阅同书第64页“(2.132)3”.

§ 6. 弧长的算法

1° 直角坐标系中的弧长 一段光滑(连续可微)曲线 $y=y(x)$ ($a \leq x \leq b$) 的弧长等于

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)} dx.$$

2° 参数方程所给曲线的弧长 若曲线 C 由参数方程

$$x=x(t), \quad y=y(t) \quad (t_0 \leq t \leq T),$$

给出, 式中 $x(t), y(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$, 则曲线 C 的弧长等于

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

3° 极坐标系中的弧长 若 $r=r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$),

式中 $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$, 则相应曲线段的弧长等于

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

关于空间曲线的弧长可参阅第八章.

求下列曲线的弧长:

【2431】 $y = x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq 4$).

解 所求的弧长为

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

【2432】 $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$).

解 $y' = \frac{p}{y}$, $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} = \sqrt{1+\frac{p}{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}}$. 所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{2} \int_0^{x_0} \sqrt{p+2x} d(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{x(p+2x)} + \frac{p}{2\sqrt{2}} \ln \left(\sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{p}{2}} \right) \right\} \Big|_0^{x_0} \\ &= 2\sqrt{x_0(x_0 + \frac{p}{2})} + p \ln \left(\frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}} \right). \end{aligned}$$

【2433】 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 从点 $A(0, a)$ 至点 $B(b, h)$.

解 所求的弧长为

$$s = \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \sqrt{h^2 - a^2}.$$

*) 由于 $h = a \operatorname{ch} \frac{b}{a}$, 故 $\operatorname{sh} \frac{b}{a} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} = \frac{1}{a} \sqrt{h^2 - a^2}$.

【2434】 $y = e^x$ ($0 \leq x \leq x_0$).

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \left(\sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} \right) \Big|_0^{x_0} \\ &= \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x_0}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x_0}} + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + e^{2x_0}}}{1 + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

【2435】 $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ ($1 \leq y \leq e$).

解 所求的弧长为

$$s = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y} \right)^2} dy = \int_1^e \frac{1 + y^2}{2y} dy = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

【2436】 $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq b < a$).

解 $y' = \frac{2ax}{a^2 - x^2}$, $\sqrt{1+y'^2} = \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$. 所求的弧长为

$$s = \int_0^b \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} dx = a \ln \frac{a+b}{a-b} - b.$$

【2437】 $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$).

解 所求的弧长为

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^a \frac{dx}{\cos x} = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right).$$

【2438】 $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (0 < b \leq y \leq a).$

解 $\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{a}{y}.$ 所求的弧长为

$$s = \int_b^a \frac{a}{y} dy = a \ln \frac{a}{b}.$$

【2439】 $y^2 = \frac{x^3}{2a-x} \quad (0 \leq x \leq \frac{5}{3}a)^{**}$.

解 如图 4.36 所示. 设 $y = tx$, 得
$$\begin{cases} x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{2at^3}{1+t^2}. \end{cases}$$

当 $0 \leq x \leq \frac{5}{3}a$ 时, $0 \leq t \leq \sqrt{5}$ (一半弧长).

$$x'_t = \frac{4at}{(t^2+1)^2}, y'_t = \frac{2at^4+6at^2}{(t^2+1)^2}, \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}.$$

所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{\sqrt{5}} \frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1} dt = 32a \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta (1+3\sin^2 \theta)} \cdots \\ &= \frac{32a}{3} \int_1^{\frac{2}{3}} \frac{dz}{z^2(z^2 - \frac{4}{3})} \cdots = \frac{32a}{3} \left\{ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \ln \frac{z - \frac{2}{\sqrt{3}}}{z + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right\} \Big|_1^{\frac{2}{3}} \\ &= 4a \left(1 + 3\sqrt{3} \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

*) 原题误为 $y^2 = \frac{x^2}{2a-x}$, 现按原答案予以改正.

**) 设 $t = 2 \tan \theta$.

***) 设 $z = \cos \theta$.

【2440】 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (星形线).

解 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$ 所求的弧长为

$$s = 4 \int_0^a \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx = 6a.$$

【2441】 $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, \quad y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t, \quad c^2 = a^2 - b^2$ (椭圆的渐屈线).

解 $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \frac{3c^2}{ab} \sin t \cos t \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}.$ 所求的弧长为

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3c^2}{ab} \sin t \cos t \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt = \frac{12c^2}{3ab(a^2 - b^2)} \{ b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t \}^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4(a^3 - b^3)}{ab}.$$

【2442】⁺ $x = a \cos^4 t, \quad y = a \sin^4 t.$

解 $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 4a \sin t \cos t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}.$ 所求的弧长为

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a \sin t \cos t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t} dt = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \left(\sin^2 t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}} d \left(\sin^2 t - \frac{1}{2} \right)$$

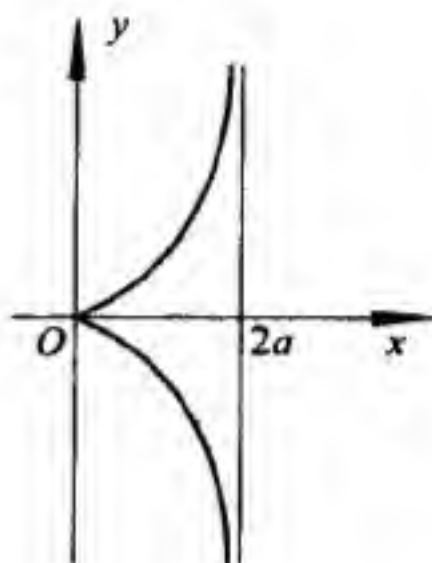


图 4.36

$$= 2a \left[\frac{\sin^2 t - \frac{1}{2}}{2} \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \sin^2 t - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^4 t + \sin^4 t)} \right| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) \right] a.$$

【2443】 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解 所求的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a.$$

【2444】 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (圆的渐伸线).

解 $x'_t = a t \cos t$, $y'_t = a t \sin t$, $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = at$. 所求的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} at dt = 2\pi^2 a.$$

【2445】⁺ $x = a(\sinh t - t)$, $y = a(\cosh t - 1)$ ($0 \leq t \leq T$).

解 $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{2}a \sqrt{\cosh^2 t - 1} = \sqrt{2}a \sinh t$. 所求的弧长为

$$s = \int_0^T \sqrt{2}a \sqrt{\cosh^2 t - 1} dt = \sqrt{2}a \int_1^{\cosh T} \sqrt{\frac{\theta}{\theta+1}} d\theta^{*}) = 2\sqrt{2}a \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan \sqrt{\cosh T}} \frac{\sin^2 z}{\cos^3 z} dz^{**})$$

$$= 2\sqrt{2}a \left\{ \frac{\sin z}{2\cos^2 z} - \frac{1}{2} \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right) \right\} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan \sqrt{\cosh T}}$$

$$= \sqrt{2}a (\sqrt{\cosh T} \sqrt{1 + \cosh T} - \sqrt{2}) - \sqrt{2}a [\ln(\sqrt{\cosh T} + \sqrt{1 + \cosh T}) - \ln(1 + \sqrt{2})]$$

$$= 2a \left(\cosh \frac{T}{2} \sqrt{\cosh T} - 1 \right) - \sqrt{2}a \ln \frac{\sqrt{2} \cosh \frac{T}{2} + \sqrt{\cosh T}}{\sqrt{2} + 1}^{***)}$$

*) 设 $\theta = \cosh t$.

**) 设 $\theta = \tan^2 z$.

***) $\sqrt{1 + \cosh T} = \sqrt{2} \cosh \frac{T}{2}$.

【2446】 $r = a\varphi$ (阿基米德螺线) ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

解 所求的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} d\varphi = a \left\{ \frac{\varphi}{2} \sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) \right\} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= a \left\{ \pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \right\}.$$

【2447】 $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) 当 $0 < \varphi < a$.

解 $0 < \varphi < a$, $-\infty < \varphi < 0$. 所求的弧长为

$$s = \int_{-\infty}^0 \sqrt{a^2 e^{2m\varphi} + a^2 m^2 e^{2m\varphi}} d\varphi = a \sqrt{m^2 + 1} \int_{-\infty}^0 e^{m\varphi} d\varphi = \frac{a \sqrt{1 + m^2}}{m}.$$

【2448】 $r = a(1 + \cos \varphi)$.

解 $\sqrt{r^2 + r'^2} = 2a \cos \frac{\varphi}{2}$. 所求的弧长为

$$s = 2 \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a.$$

【2449】 $r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$).

解 $r' = \frac{p \sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}$, $\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{2p \cos \frac{\varphi}{2}}{(1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}$. 所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2p \cos \frac{\varphi}{2}}{(1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{p}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^3 \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{p}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec \frac{\varphi}{2} (1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}) d\varphi \\
&= p \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sec^2 \frac{\varphi}{2} - 1} d\left(\sec \frac{\varphi}{2}\right) \right\} \\
&= 2p \left\{ \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4} \right) + \frac{\sec \frac{\varphi}{2}}{2} \sqrt{\sec^2 \frac{\varphi}{2} - 1} - \frac{1}{2} \ln \left(\sec \frac{\varphi}{2} + \tan \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= p \{ \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \}.
\end{aligned}$$

【2450】 $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

解 $\sqrt{r^2 + r'^2} = a \sin^2 \frac{\varphi}{3}$ ($0 \leq \varphi \leq 3\pi$) (图 4.37). 所求的弧长为

$$s = \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

我们甚至可以证明:

1° 弧 \widehat{AB} 为弧 \widehat{OABC} 的三分之一;

2° \widehat{OA} , \widehat{AB} , \widehat{BC} 之间依次是等差的, 其公差为 $\frac{3a}{8}\sqrt{3}$.

不仅如此, 我们还可以证明更一般的情况:

曲线: $r = a \sin^n \frac{\varphi}{n}$ (n 为正整数) 之全长为

$$s = \begin{cases} \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} 4ka, & n=2k, \\ \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \pi a, & n=2k+1. \end{cases}$$

【2451】 $r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

解 $r' = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{r^2 + r'^2} &= \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4 \operatorname{sh}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} + 1} = \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \varphi + 1} \\
&= \frac{a \operatorname{ch} \varphi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{a \operatorname{ch} \varphi}{1 + \operatorname{ch} \varphi} = a \left(1 - \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \varphi} \right) = a \left(1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \right).
\end{aligned}$$

所求的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} a \left(1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \right) d\varphi = a \left(\varphi - \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \right) \bigg|_0^{2\pi} = a(2\pi - \operatorname{th} \pi).$$

【2452】 $\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$ ($1 \leq r \leq 3$).

解 $r^2 - 2r\varphi + 1 = 0$, 两边对 φ 求导, 得 $2rr' - 2\varphi r' - 2r = 0$ 即 $r' = \frac{r}{r - \varphi}$, 从而 $\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{r\varphi}{r - \varphi} = \frac{r^3 + r}{r^2 - 1}$,

$d\varphi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) dr$, 所求的弧长为

$$s = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{r^3 + r}{r^2 - 1} \frac{r^2 - 1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(r + \frac{1}{r} \right) dr = 2 + \frac{1}{2} \ln 3.$$

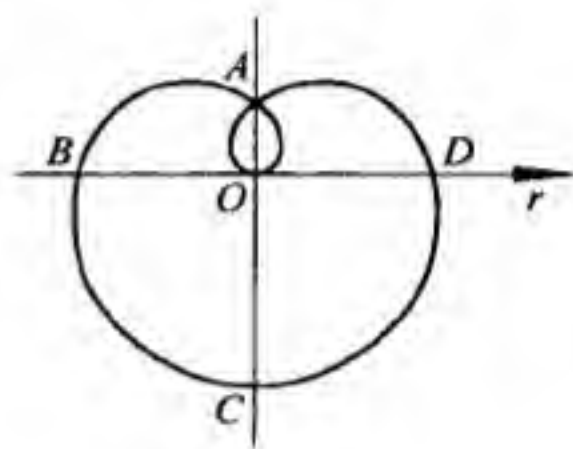


图 4.37

【2453】 证明:椭圆 $x=acost, y=bsint$ 的弧长等于正弦曲线 $y=c\sin \frac{x}{b}$ 的一波之长, 其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

证 对于椭圆, 其全长为

$$s_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt.$$

对于正弦曲线, 其一波 (x 由 0 到 $2\pi b$) 之长为

$$s_2 = \int_0^{2\pi b} \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2} \cos^2 \frac{x}{b}} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + c^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt.$$

所以, $s_1 = s_2$, 本题得证.

【2454】 抛物线 $4ay = x^2$ 沿 Ox 轴滚动. 证明: 抛物线的焦点的轨迹是悬链线.

解 如图 4.38 所示, 设抛物线切 Ox 轴于点 $A(s, 0)$, O' 为抛物线的顶点, P' 为焦点, 且 $O'Y'$ 为对称轴, $O'X' \perp O'Y'$, 过 A 作 $AB \perp O'X'$.

引入参数 $O'N = t$, 则由抛物线的性质易知: $P'N \perp Ox$,

$O'B = 2O'N = 2t$. 从而有

$$AB = \frac{(2t)^2}{4a} = \frac{t^2}{a}, \quad AN = t \sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}},$$

$$s = \int_0^{2t} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2} dx = t \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} + a \ln \left[\frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} \right],$$

$$P'N = a \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

于是, 焦点 P' 的坐标 x, y 由参数 t 表出:

$$\begin{cases} x = s - AN = a \ln \left[\frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} \right], \\ y = P'N = a \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}. \end{cases} \quad (1)$$

由(1)式得

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}, \quad e^{-\frac{x}{a}} = -\frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

上面两式相加, 得 $e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} = 2\sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}$.

再以(2)式代入上式, 最后得 $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a \cosh \frac{x}{a}$.

这说明抛物线的焦点的轨迹是悬链线.

【2455】 求曲线 $y = \pm \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x}$ 的封闭部分与等周长圆周所分别围成的面积之比.

解 当 $x=0$ 及 $x=\frac{1}{3}$ 时, $y=0$. 此曲线所围图形的面积为

$$S_1 = 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x} dx = \frac{8}{135\sqrt{3}}.$$

此环线的周长为

$$s = 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} \right)^2} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{6\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{2} \right) dx = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

按题设有 $\frac{4}{3\sqrt{3}} = 2\pi R$, 所以, $R = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi}$. 圆面积 $S_2 = \pi R^2 = \frac{4}{27\pi}$.

于是,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \approx 0.73.$$

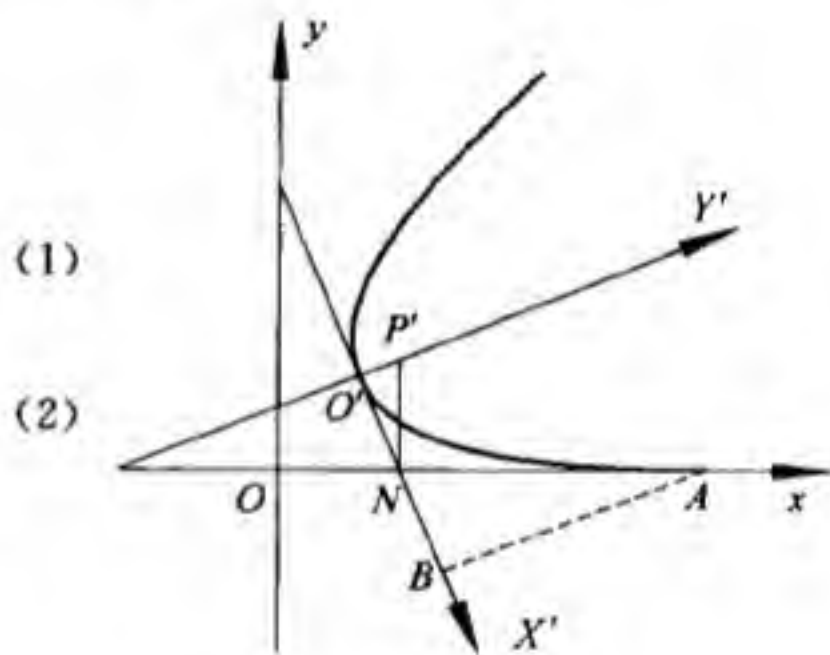


图 4.38

§ 7. 体积的计算法

1° 由已知横截面计算物体的体积 若物体的体积 V 存在, 且 $S=S(x)$ ($a \leq x \leq b$) 为物体的横截面面积, 此横截面经过点 x 且垂直于 Ox 轴, 则 $V = \int_a^b S(x) dx$.

2° 旋转体的体积 曲边梯形

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

在这里 $y(x)$ 为单值连续函数. 在更一般的情形下, 图形

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

绕 Ox 轴旋转所成的环状体的体积等于

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx.$$

这里 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负的连续函数

【2456】 求顶楼的体积, 其底是边长等于 a 及 b 的矩形, 其顶的棱边等于 c , 而高等于 h .

解 如图 4.39 所示的顶楼, 取 x 轴向下, 则有

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{h} \quad \text{或} \quad y = \frac{b}{h}x, \quad \frac{z-c}{a-c} = \frac{x}{h} \quad \text{或} \quad z = \frac{a-c}{h}x + c.$$

于是, 所求顶楼的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h yz dx = \int_0^h \frac{b}{h}x \left(\frac{a-c}{h}x + c \right) dx \\ &= \frac{b}{h} \cdot \frac{a-c}{h} \cdot \frac{1}{3}h^3 + \frac{bc}{h} \cdot \frac{1}{2}h^2 = \frac{bh}{6}(2a+c). \end{aligned}$$

【2457】 求截楔形的体积, 其平行的上下底为边长分别等于 A, B 和 a, b 的矩形, 而高等于 h .

解 如图 4.40 所示, $OO' = \frac{A}{2}$, $QQ' = \frac{a}{2}$, $OQ = h$.

设 $OP = x$, 则 $PP' = \frac{a}{2} + \frac{h-x}{h} \left(\frac{A-a}{2} \right)$.

同样可得 $LP' = \frac{b}{2} + \frac{h-x}{h} \left(\frac{B-b}{2} \right)$.

从而, 面积

$$\begin{aligned} KLMN &= ab + (A-a)(B-b) \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2 + [a(B-b) + b(A-a)] \left(1 - \frac{x}{h} \right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

于是, 所求截楔形的体积为 $V = \int_0^h f(x) dx = \frac{h}{6} [(2A+a)B + (2a+A)b]$.

【2458】 求截锥体的体积, 其上下底为半轴长分别等于 A, B 和 a, b 的椭圆, 而高等于 h .

解 同 2457 题, 任一平行于上下底且距离下底为 x 的截面为一椭圆, 其半轴分别为

$$a' = a + \left(1 - \frac{x}{h} \right) (A-a) \quad \text{及} \quad b' = b + \left(1 - \frac{x}{h} \right) (B-b),$$

从而, 此截面的面积为

$$S(x) = \pi a' b' = \pi \left\{ ab + (A-a)(B-b) \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2 + [a(B-b) + b(A-a)] \left(1 - \frac{x}{h} \right) \right\}.$$

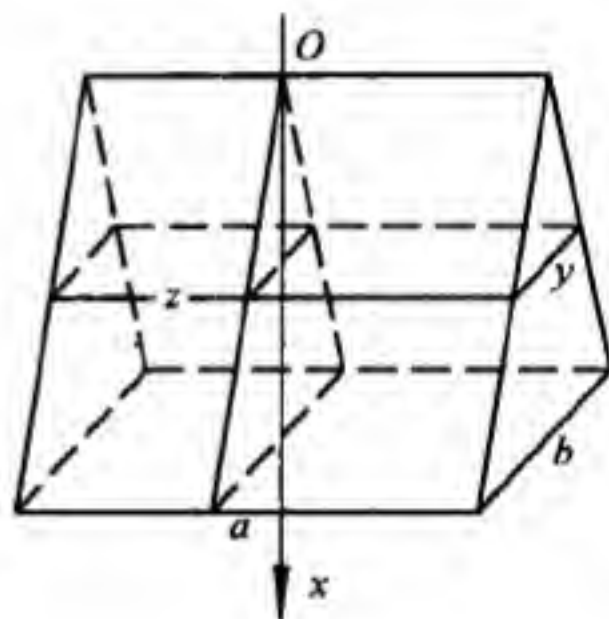


图 4.39

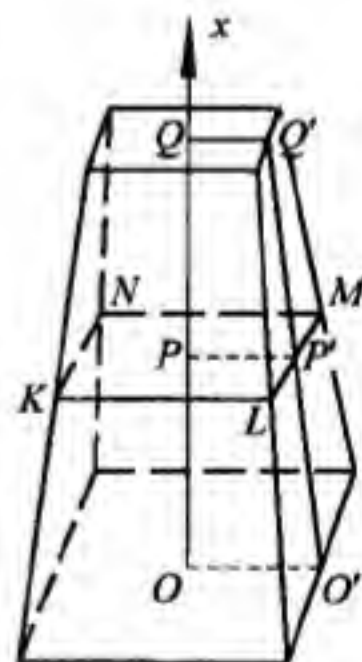


图 4.40

于是,所求的体积为

$$V = \int_0^h S(x) dx = \frac{\pi h}{6} [(2A+a)B + (A+2a)b].$$

【2459】 求旋转抛物体的体积,其底为 S ,而高等于 H .

解 不失一般性,假设抛物线方程为 $y^2 = 2px$,

绕 Ox 轴旋转,如图 4.41 所示. 记 $OA = H, OB = x$,按假设有

$$S = \pi AC^2 = \pi(2pH) = 2\pi pH,$$

距原点为 x 的截面面积为

$$S(x) = \pi y^2 = 2\pi px.$$

于是,所求的体积为 $V = \int_0^H S(x) dx = \pi p H^2 = \frac{SH}{2}$.

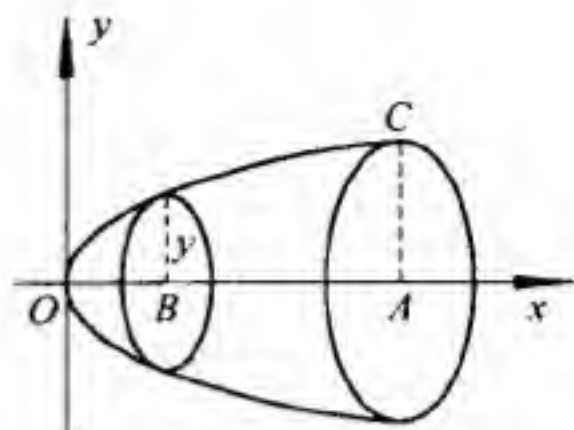


图 4.41

【2460】 设立体之垂直于 Ox 轴的横截面的面积 $S = S(x)$ 依下面的二次式规律变化:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (a \leq x \leq b),$$

其中 A, B 及 C 为常数. 证明:此物体之体积等于

$$V = \frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right],$$

其中 $H = b - a$ (辛普森公式).

$$\begin{aligned} \text{证} \quad V &= \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b - a) \\ &= \frac{b-a}{6} [2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(a+b) + 6C] \\ &= \frac{H}{6} [(Aa^2 + Ba + C) + (Ab^2 + Bb + C) + A(a^2 + 2ab + b^2) + 2B(a+b) + 4C] \\ &= \frac{H}{6} \left[S(a) + S(b) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

【2461】 物体是点 $M(x, y, z)$ 的集合,其中 $0 \leq z \leq 1$, 而且当 z 为有理数时, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$; 当 z 为无理数时, $-1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0$. 证明:此物体的体积不存在,尽管相应积分

$$\int_0^1 S(z) dz = 1.$$

证 显然,对任何 $0 \leq z \leq 1$,不论 z 是有理数还是无理数,都有 $S(z) = 1$. 从而,

$$\int_0^1 S(z) dz = \int_0^1 dz = 1.$$

下证此物体 (V) 的体积不存在. 显然,无完全含于 (V) 内的多面体 (X) 存在,从而,这种 (X) 的体积的上确界为零,即 (V) 的内体积 $V_- = \sup \{X\} = 0$. 另一方面, (V) 的外体积 $V^+ = \inf \{Y\}$, 其中的下确界是对所有完全包含着 (V) 的多面体 (Y) 的体积 Y 来取的. 由于 $0 \leq z \leq 1$ 中的有理数和无理数都在 $0 \leq z \leq 1$ 中是稠密的,故显然知,上述任何完全包含着 (V) 的多面体 (Y) 都必完全包含着点集 $(Y_0) = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{ 以及 } -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0\}$. 而 (Y_0) 又完全包含着 (V) , 并且 (Y_0) 的体积 $Y_0 = 2$. 由此可知 $V^+ = \inf \{Y\} = 2$. 于是, $V_- \neq V^+$. 故此物体 (V) 的体积不存在.

求下列曲面所围成的体积:

【2462】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = \frac{c}{a}x, z = 0$.

解 如图 4.42 所示,用垂直 Oy 轴的平面截割,得一直角三角形

PQR . 设 $OP = y$, 则高 $QR = \frac{c}{a}x$, 从而,它的面积为

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a}x^2 = \frac{ac}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

于是,所求的体积为 $V = 2 \int_0^b \frac{ac}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{2}{3}abc$.

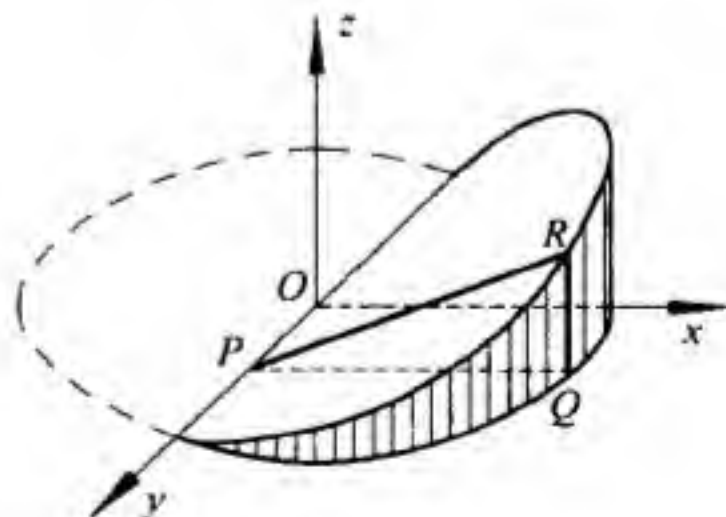


图 4.42

【2463】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (椭球面).

提示 用垂直于 Ox 轴的平面截椭球面, 其截痕为一椭圆, 易知其面积为

$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad -a \leq x \leq a.$$

解 用垂直于 Ox 轴的平面截椭球面得截痕为一椭圆, 它在 yOz 平面上的投影为

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1.$$

由此显见其半轴分别为

$$b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{及} \quad c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

从而, 此椭圆的面积为

$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad -a \leq x \leq a.$$

于是, 所求的椭球面的体积为 $V = \int_{-a}^a S(x) dx = \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \pi bc dx = \frac{4}{3} \pi abc.$

【2464】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c.$

提示 方程表示的图形为单叶双曲面, 用平面 $z=h$ 截此曲面, 其截痕为一椭圆, 易知其面积为

$$S(h) = \pi ab \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right), \quad -c \leq h \leq c.$$

解 方程表示的图形为单叶双曲面, 用平面 $z=h$ 截得椭圆

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1,$$

其面积为

$$S(x) = \pi ab \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right), \quad -c \leq h \leq c.$$

于是, 所求的体积为 $V = \pi ab \int_{-c}^c \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right) dh = \frac{8}{3} \pi abc.$

【2465】 $x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$

提示 过点 $(0, 0, z)$ 垂直于 Oz 轴作一平面, 在所给立体上截出一个正方形, 其面积为 $S(z) = a^2 - z^2, \quad 0 \leq z \leq a$, 它对应于八分之一的体积.

解 如图 4.43 所示, 过点 $M(0, 0, z)$ 垂直于 Oz 轴作一平面, 在所给立体上截出一正方形, 其边长为 $\sqrt{a^2 - z^2}$, 所以, 其面积为

$$S(z) = a^2 - z^2, \quad 0 \leq z \leq a.$$

于是, 所求的体积为

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \frac{16}{3} a^3.$$

【2466】 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = ax.$

解 如图 4.44 所示, 过点 $M(x, 0, 0)$ 垂直于 Ox 轴作一平面, 在所给立体上截出一曲边梯形, 其曲边由方程

$$z = \sqrt{(a^2 - x^2) - y^2}$$

给出(上半面), 其变化范围为:

$$-\sqrt{ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{ax - x^2} \quad (\text{如图中 } ABCD).$$

从而, 其截面积为

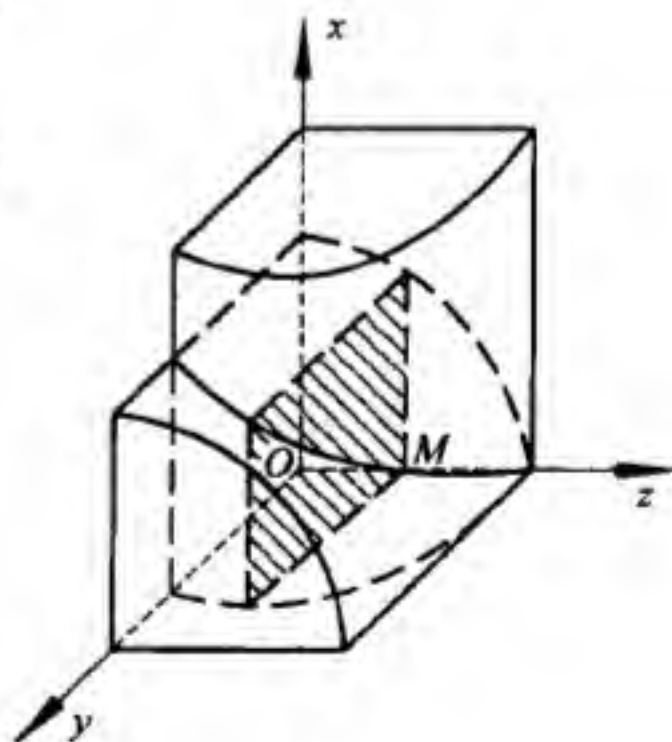


图 4.43

$$S(x) = 2 \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{(a^2-x^2)-y^2} dy$$

$$= a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + (a^2-x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}.$$

于是, 所求的体积为

$$V = 2 \int_0^a S(x) dx$$

$$= 2 \int_0^a \left[a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + (a^2-x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right] dx$$

$$= 4 \left\{ \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{5} a^3 + \left[\left(\frac{\pi a^3}{4} - \frac{1}{2} a^3 \right) - \left(\frac{1}{12} \pi a^3 - \frac{13}{90} a^3 \right) \right] \right\}$$

$$= \frac{2}{3} a^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right).$$

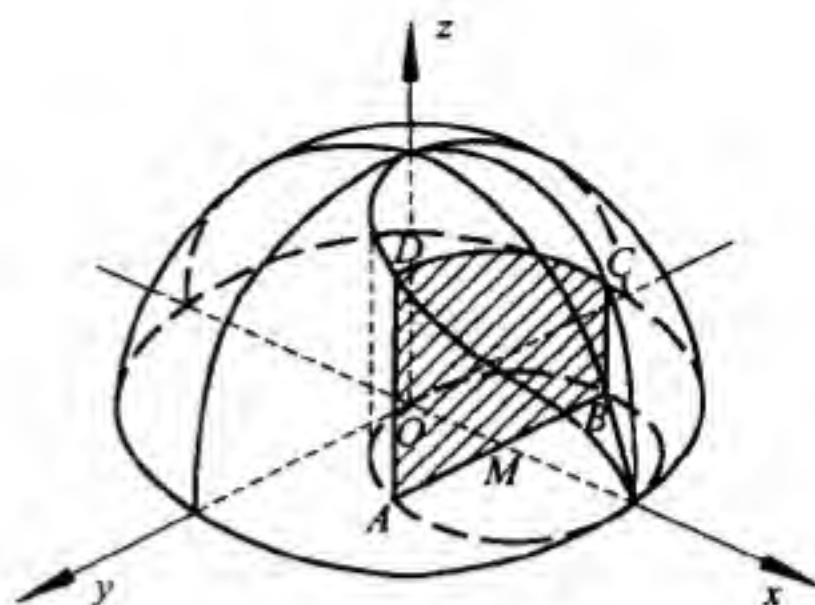


图 4.44

【2467】 $z^2 = b(a-x), x^2 + y^2 = ax.$

解 先求体积的四分之一部分, 截面积为

$$S(x) = \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{b(a-x)} dy = \sqrt{ax-x^2} \sqrt{b(a-x)}.$$

从而,
$$\frac{1}{4} V = \int_0^a S(x) dx = \int_0^a \sqrt{ax-x^2} \sqrt{b(a-x)} dx = \sqrt{b} \int_0^a \sqrt{x} (a-x) dx = \frac{4}{15} a^2 \sqrt{ab}.$$

于是, 所求的体积为
$$V = \frac{16}{15} a^2 \sqrt{ab}.$$

【2468】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1 \quad (0 < z < a).$

解 固定 z , 则截面为一椭圆, 其面积为 $P(z) = \pi a z$.

于是, 所求的体积为
$$V = \int_0^a P(z) dz = \pi a \int_0^a z dz = \frac{\pi a^3}{2}.$$

【2469】⁺ $x+y+z^2=1, x=0, y=0, z=0.$

解 固定 z , 则截面为一直角三角形, 其面积为

$$P(z) = \frac{1}{2} (1-z^2)^2.$$

于是, 所求的体积为
$$V = \int_0^1 \frac{1}{2} (1-z^2)^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-2z^2+z^4) dz = \frac{4}{15}.$$

注意 曲面 $x+y+z^2=1$ 关于平面 $z=0$ 对称, 故它与三个平面 $x=0, y=0, z=0$ 围成的图形有两个, 一个位于 Oxy 平面之上, 一个位于 Oxy 平面之下, 彼此是对称的 (关于 Oxy 平面), 从而, 它们的体积相等. 我们以上求的是位于 Oxy 平面之上的那一个图形的体积.

【2470】 $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2.$

解 不妨设 $a>0$. 此为一有心椭球面. 固定 z , 得在平面 xOy 上的投影为

$$x^2+xy+y^2+zx+zy+(z^2-a^2)=0,$$

此截面的面积为

$$S(z) = -\frac{\pi \Delta}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{8\pi \Delta}{3\sqrt{3}},$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & \frac{z}{2} & z^2-a^2 \end{vmatrix} = \frac{2z^2-3a^2}{4},$$

所以,

$$S(z) = \frac{2(3a^2 - 2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}.$$

z 的变化范围为适合下述不等式的集合:

$$2z^2 - 3a^2 \leq 0, \quad \text{即} \quad |z| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

于是, 所求的体积为 $V = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}a}^{\sqrt{\frac{3}{2}}a} \frac{2(3a^2 - 2z^2)\pi}{3\sqrt{3}} dz = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}a^3.$

*) 此公式详见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷第一分册第 330 目 7.

【2471】 证明: 将平面图形 $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x)$, 绕 Oy 轴旋转所成的旋转体的体积等于

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

这里 $y(x)$ 为单值连续函数.

证 $\Delta V_y = \pi[(x+\Delta x)^2 - x^2]y(x) \approx 2\pi xy(x)\Delta x$. 于是, 所求的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

求下列曲线段旋转所成旋转体的体积:

【2472】 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} (0 \leq x \leq a)$ 绕 Ox 轴 (半立方抛物线).

解 所求的体积为 $V_x = \pi b^2 \int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}} dx = \frac{3}{7} \pi ab^2.$

【2473】 $y = 2x - x^2, y = 0$; (1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 令 $y = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = 2$. 于是, 所求的体积为

$$(1) V_x = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}; \quad (2) V_y = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = \frac{8\pi}{3}.$$

【2474】 $y = \sin x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi)$; (1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

$$(1) V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}; \quad (2) V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi^2.$$

【2475】 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2, y = b\left|\frac{x}{a}\right|$; (1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 交点为 (a, b) 及 $(-a, b)$. 所求的体积为

$$(1) V_x = 2\pi \int_0^a \left(b^2 \frac{x^2}{a^2} - b^2 \frac{x^4}{a^4}\right) dx = \frac{4\pi}{15} ab^2; \quad (2) V_y = \pi \int_0^b \left(\frac{a^2 y}{b} - \frac{a^2 y^2}{b^2}\right) dy = \frac{\pi a^2 b}{6}.$$

【2476】 $y = e^{-x}, y = 0 (0 \leq x < +\infty)$; (1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

$$(1) V_x = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{\pi}{2}; \quad (2) V_y = \pi \int_0^1 (-\ln y)^2 dy = 2\pi.$$

【2477】 $x^2 + (y-b)^2 = a^2 (0 < a \leq b)$ 绕 Ox 轴.

解 $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2}, y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2} (-a \leq x \leq a)$. 所求的体积为

$$V_x = \pi \int_{-a}^a (y_1^2 - y_2^2) dx = 8b\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b.$$

【2478】 $x^2 - xy + y^2 = a^2$ 绕 Ox 轴.

解 原方程即 $y^2 - xy + x^2 - a^2 = 0$, 从而,

$$y = \frac{x \pm \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2},$$

函数的定义域为 $[-\frac{2}{\sqrt{3}}a, \frac{2}{\sqrt{3}}a]$. 与 Ox 轴的交点分别为 $x = -a$ 与 $x = a$. 于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
 V_x &= 2 \left\{ \pi \int_0^a \frac{1}{4} (x + \sqrt{4a^2 - 3x^2})^2 dx + \pi \int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} \left[\frac{1}{4} (x + \sqrt{4a^2 - 3x^2})^2 - \frac{1}{4} (x - \sqrt{4a^2 - 3x^2})^2 \right] dx \right\} \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^a (4a^2 - 2x^2 + 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2}) dx + 2\pi \int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} x \sqrt{4a^2 - 3x^2} dx \\
 &= \pi \left[2a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{9}(4a^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a - \frac{2}{9}(4a^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} = \frac{8}{3}\pi a^3.
 \end{aligned}$$

【2479】 $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x < +\infty$) 绕 Ox 轴.

解 函数定义域为 $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, ($n=0, 1, 2, \dots$). 于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-2x} \sin x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{5} e^{-2x} (-2\sin x - \cos x) \Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\
 &= \frac{\pi}{5} (e^{-2\pi} + 1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-4n\pi} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{e^{-2\pi} + 1}{1 - e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5(1 - e^{-2\pi})}.
 \end{aligned}$$

【2480】 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y=0$;

(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴; (3) 绕直线 $y=2a$.

解 所求的体积为

$$(1) V_x = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3; \quad (2) V_y = 2\pi \int_0^{2\pi} a^3 (t - \sin t) (1 - \cos t)^2 dt = 6\pi^3 a^3;$$

(3) 作平移: $y = \bar{y} + 2a$, $x = \bar{x}$ 则曲线方程为,

$$\bar{x} = a(t - \sin t), \quad \bar{y} = -a(1 + \cos t),$$

及

$$\bar{y} = -2a.$$

于是, 所求的体积为 $V_x = \pi \int_0^{2\pi} [4a^2 - a^2(1 + \cos t)^2] a(1 - \cos t) dt = 7\pi^2 a^3$.

【2481】 $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

$$\begin{aligned}
 (1) V_x &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b^2 \cos^6 t) (3a \sin^2 t \cos t) dt = 6\pi ab^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt \right) = 6\pi ab^2 \left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!} \right) \\
 &= \frac{32}{105} \pi ab^2;
 \end{aligned}$$

(2) 利用对称性, 只需将上述答案中 a, b 对调即得 $V_y = \frac{32}{105} \pi a^2 b$.

*) 利用 2282 题的结果.

【2482】 证明: 把平面图形

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq r(\varphi) \quad (\varphi \text{ 与 } r \text{ 为极坐标})$$

绕极轴旋转所成旋转体的体积等于 $V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi$.

证 证法 1:

微小面积元 $dS = r d\varphi dr$ 绕极轴旋转所得微小环状体积元

$$dV = 2\pi r \sin \varphi dS = 2\pi r^2 \sin \varphi d\varphi dr.$$

于是, 所求的体积为

$$V = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sin \varphi d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r^2 dr = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

证法 2:

应用直角坐标系下的古尔丹第二定理* 来证明. 对于微小面积元,

它的质心可以看成在点 $(\frac{2}{3} r \cos \varphi, \frac{2}{3} r \sin \varphi)$ 处 (图 4.45).

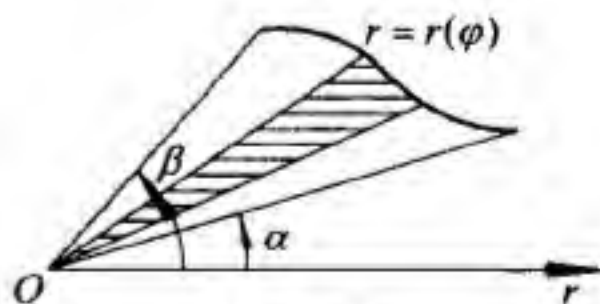


图 4.45

于是, 面积元 $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$, 其所对应的绕极轴旋转所成旋转体的体积元为

$$dV = 2\pi \cdot \frac{2}{3}r \sin\varphi \cdot \frac{1}{2}r^2 d\varphi.$$

于是, 所求的体积为 $V = \frac{2\pi}{3} \int_a^b r^3(\varphi) \sin\varphi d\varphi$.

*) 参看 2506 题.

求下列由极坐标或直角坐标给出的平面图形经旋转后所成旋转体的体积:

【2483】 $r = a(1 + \cos\varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

(1) 绕极轴; (2) 绕直线 $r\cos\varphi = -\frac{a}{4}$.

解 (1) $V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{2\pi} a^3(1 + \cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{8\pi a^3}{3}$;

(2) 方法 1: 所求的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^\pi r^2 \left(\frac{2}{3}r\cos\varphi + \frac{a}{4} \right) d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^3 \cos\varphi d\varphi + \frac{\pi a^3}{2} \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi \\ &= \left(4\pi a^3 + \frac{\pi a^3}{2} \right) \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi + \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^\pi \cos^4\varphi d\varphi + \frac{\pi^2 a^3}{2} \\ &= \left(4\pi a^3 + \frac{\pi a^3}{2} \right) \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \pi + \frac{\pi^2 a^3}{2} = \frac{13}{4} \pi^2 a^3. \end{aligned}$$

注 (1) 在 V 的表达式中 $\frac{2}{3}r\cos\varphi$ 的系数 $\frac{2}{3}$ 是把微小面积元集中在其质心 $(\frac{2}{3}r, \varphi)$ 处得出的.

$$(2) \int_0^\pi \cos^{2k+1}\varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^\pi \cos^{2k}\varphi d\varphi = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4 \cdot 2} \pi.$$

方法 2:

心脏线 $r = a(1 + \cos\varphi)$ 的面积为 $\frac{3\pi a^2}{2}$, 而其质心为 $\varphi_0 = 0$, $r_0 = \frac{5}{6}a$. 根据古尔丹第二定理可得所

求的体积为

$$V = 2\pi \left(\frac{5a}{6} + \frac{a}{4} \right) \frac{3\pi a^2}{2} = \frac{13}{4} \pi^2 a^3.$$

*) 利用 2419 题的结果.

**) 利用 2512 题的结果.

【2484】 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$:

(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴; (3) 绕直线 $y = x$.

解 (1) 曲线的极坐标方程为 $r^2 = a^2(2\cos^2\varphi - 1)$.

$$V_x = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^2(2\cos^2\varphi - 1)]^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi.$$

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad & \int (2\cos^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int [(\sqrt{2}\cos\varphi)^2 - 1]^{\frac{3}{2}} d(\sqrt{2}\cos\varphi) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8} (4\cos^2\varphi - 5) \sqrt{2\cos^2\varphi - 1} + \frac{3}{8} \ln(\sqrt{2}\cos\varphi + \sqrt{2\cos^2\varphi - 1}) \right] + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } V_x &= -\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8} (4\cos^2\varphi - 5) \sqrt{2\cos^2\varphi - 1} + \frac{3}{8} \ln(\sqrt{2}\cos\varphi + \sqrt{2\cos^2\varphi - 1}) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left[\frac{3}{8} \ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{8} \right] = \frac{1}{4} \pi a^3 \left[\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{2}{3} \right]. \end{aligned}$$

(2) 利用对称性知, 所求的体积为

$$V_y = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \cos\varphi d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi} \cos\varphi d\varphi.$$

令 $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x$, 则 $\sqrt{\cos 2\varphi} = \cos x$, $\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x dx$, 并且 x 的变化范围为 $(0, \frac{\pi}{2})$. 于是, 得

$$V = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^4 x dx = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

(3) 利用对称性知, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi\right) d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi} \cos\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

若用本题(2)的变换, 即得

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^4 x dx = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

【2485】 求图形 $a \leq r \leq a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ 绕极轴旋转而成的旋转体的体积.

解 $r=a$ 与 $r=a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ 在第一象限部分的交点的极角分别为 $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 及 $\beta = \frac{5\pi}{12}$. 利用对称性知, 所求的体积应为

$$V = \frac{4\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} [(a\sqrt{2\sin 2\varphi})^3 - a^3] \sin\varphi d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (4\sqrt{2} \sqrt{\sin 2\varphi} \sin^2 \varphi \cos\varphi - \sin\varphi) d\varphi.$$

为求上述积分, 令 $I_1 = \int \sqrt{\sin 2\varphi} \sin^2 \varphi \cos\varphi d\varphi$, $I_2 = \int \sqrt{\sin 2\varphi} \cos^2 \varphi \cos\varphi d\varphi$,

则有

$$I_2 - I_1 = \frac{1}{3} \cos\varphi (\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} I_1,$$

即

$$I_2 - \frac{5}{3} I_1 = \frac{1}{3} \cos\varphi (\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}. \quad (1)$$

又

$$I_2 + I_1 = \int \sqrt{\sin 2\varphi} \cos\varphi d\varphi = \sqrt{2} \int \frac{\tan\varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \sqrt{\cot\varphi} d\varphi.$$

令 $\tan\varphi = t$, 就可将上述积分化成二项微分式的积分. 积分之, 得

$$\begin{aligned} I_2 + I_1 &= \frac{1}{2} \sin\varphi \sqrt{\sin 2\varphi} + \frac{1}{2} \ln(\sin\varphi + \cos\varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}) + \frac{1}{4} [\ln(\sin\varphi + \cos\varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}) \\ &\quad + \arcsin(\sin\varphi - \cos\varphi)]. \end{aligned} \quad (2)$$

(2)-(1), 得

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{3}{8} \left\{ \frac{1}{2} \sin\varphi \sqrt{\sin 2\varphi} + \frac{1}{2} \ln(\sin\varphi + \cos\varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}) + \frac{1}{4} [\ln(\sin\varphi + \cos\varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}) + \arcsin(\sin\varphi - \cos\varphi)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \cos\varphi (\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \right\} + C. \end{aligned}$$

从而, 得

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sqrt{\sin 2\varphi} \sin^2 \varphi \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{8} + \frac{3}{64} \pi.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \frac{4\pi a^3}{3} \left[4\sqrt{2} \left(\frac{1}{8} + \frac{3\pi}{64} \right) + \cos\varphi \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} = \frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}.$$

§ 8. 旋转曲面表面积的计算法

平滑曲线 AB 绕 Ox 轴旋转所成曲面的面积等于

$$P = 2\pi \int_A^B y ds,$$

式中 ds 为弧的微分.

求旋转下列曲线所成曲面的面积:

【2486】 $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$ ($0 \leq x \leq a$) 绕 Ox 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9x}{4a}}$. 于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_r &= 2\pi \int_0^a x \sqrt{\frac{x}{a}} \sqrt{1+\frac{9x}{4a}} dx = \frac{3\pi}{a} \int_0^a x \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} dx \\ &= \frac{3\pi}{a} \int_0^a \left(x + \frac{2a}{9}\right) \sqrt{\left(x + \frac{2a}{9}\right)^2 - \left(\frac{2a}{9}\right)^2} d\left(x + \frac{2a}{9}\right) - \frac{3\pi}{a} \cdot \frac{2a}{9} \int_0^a \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} dx \\ &= \frac{3\pi}{a} \cdot \frac{1}{3} \left(x^2 + \frac{4ax}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a - \frac{2\pi}{3} \left[\frac{x + \frac{2a}{9}}{2} \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} - \frac{4a^2}{2} \ln \left(x + \frac{2a}{9} - \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}}\right) \right] \Big|_0^a \\ &= \frac{13\sqrt{13}}{27} \pi a^2 - \frac{11\sqrt{13}}{81} \pi a^2 + \frac{4\pi a^2}{243} \ln \frac{11+3\sqrt{13}}{2} \\ &= \frac{4\pi a^2}{243} \left(21\sqrt{13} + 2 \ln \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right). \end{aligned}$$

【2487】 $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ ($|x| \leq b$) 绕 Ox 轴.

解 $y' = -\frac{\pi a}{2b} \sin \frac{\pi x}{2b}$, $\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2b} \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}}$.

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_r &= 2\pi \int_{-b}^b y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_{-b}^b \frac{a}{2b} \cos \frac{\pi x}{2b} \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}} dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} \pi a \sin \frac{\pi x}{2b} \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}} + \frac{4b^2}{2} \ln \left| \pi a \sin \frac{\pi x}{2b} + \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}} \right| \right] \Big|_{-b}^b \\ &= 2a \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2} + \frac{8b^2}{\pi} \ln \frac{\pi a + \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2}}{2b}. \end{aligned}$$

【2488】 $y = \tan x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 绕 Ox 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\sec^4 x} = \frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x}$. 于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_r &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^4 x + 1} d\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \\ &= \pi \left[\frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x} - \ln(\cos^2 x + \sqrt{\cos^4 x + 1}) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2} \right]. \end{aligned}$$

【2489】 $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$): (1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 (1) $\sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}$. 于是, 所求的表面积为

$$P_r = 2\pi \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}} dx = \frac{2\pi}{3} [(2x_0 + p) \sqrt{2px_0 + p^2} - p^2].$$

(2) $\sqrt{1+x'^2} = \frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}$. 于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_y &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2px_0}} x \sqrt{1+x'^2} dy \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2px_0}} \frac{y^2}{2p} \cdot \frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p} dy = \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2 \sqrt{p^2+y^2} dy \\ &= \frac{2\pi}{p^2} \left[\frac{y(2y^2+p^2)}{8} \sqrt{p^2+y^2} - \frac{p^4}{8} \ln(y + \sqrt{y^2+p^2}) \right] \Big|_0^{\sqrt{2px_0}} \\ &= \frac{\pi}{4} \left[(p+4x_0) \sqrt{2x_0(p+2x_0)} - p^2 \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}} \right]. \end{aligned}$$

【2490】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b \leq a$): (1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 (1) $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$, $yy' = -\frac{b^2}{a^2}x$,

$$y \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \epsilon^2 x^2}.$$

于是, 所求的表面积为

$$P_x = 2\pi \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \epsilon^2 x^2} dx = \frac{2\pi b}{a} \left(a \sqrt{a^2 - \epsilon^2 a^2} + \frac{a^2}{\epsilon} \arcsin \epsilon \right) = 2\pi b \left(b + \frac{a}{\epsilon} \arcsin \epsilon \right),$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率.

(2) 将 x, y 轴对调, 即将 x 轴作为短轴. 于是, 在所得出的 $y \sqrt{1+y'^2}$ 中仅需将 a 与 b 的位置对调一下即可, 即

$$y \sqrt{1+y'^2} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \frac{a^2-b^2}{b^2}x^2} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2}.$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_y &= 2\pi \frac{a}{b} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2} dx = 2\pi a \frac{1}{b} \left[\frac{x}{2} \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2} + \frac{b^3}{2c} \ln \left(\frac{c}{b}x + \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2} \right) \right] \Big|_{-b}^b \\ &= 2\pi a \left[\sqrt{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{2c} \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2} + c}{\sqrt{b^2 + c^2} - c} \right) \right] = 2\pi a \left[a + \frac{b^2}{2c} \ln \left(\frac{a+c}{a-c} \right) \right] = 2\pi a \left(a + \frac{b^2}{2a} \cdot \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right) \\ &= 2\pi a \left\{ a + \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{\epsilon} \ln \left[\frac{a}{b} (1+\epsilon) \right] \right\}. \end{aligned}$$

【2491】 $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($b \geq a$) 绕 Ox 轴.

解 此圆分成两单值支

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{及} \quad y = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是, 所求的表面积为

$$P_x = 2\pi \int_{-a}^a (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + 2\pi \int_{-a}^a (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 4\pi^2 ab.$$

【2492】 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 绕 Ox 轴.

解 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, $\sqrt{1+y'^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$.

于是, 所求的表面积为

$$P_x = 2 \cdot 2\pi \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}} \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = -\frac{12\pi a^{\frac{1}{3}}}{5} (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}} \Big|_0^a = \frac{12\pi a^2}{5}.$$

【2493】 $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ($|x| \leq b$): (1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 (1) $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} + 1} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$

于是, 所求的表面积为

$$P_x = 2\pi a \int_{-b}^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = 2\pi a \int_0^b \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx = \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right).$$

$$(2) P_y = 2\pi \int_0^b x \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^b x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = 2\pi a \left(a + b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a}\right).$$

【2494】 $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ 绕 Ox 轴.

解 $x'_y = \mp \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \quad \sqrt{1+x'^2} = \frac{a}{y} \quad (0 \leq y \leq a).$

于是, 所求的表面积为

$$P_x = 2 \cdot 2\pi \int_0^a y \frac{a}{y} dy = 4\pi a^2.$$

【2495】 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$

(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴; (3) 绕直线 $y = 2a$.

解 先求 ds :

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt.$$

于是, 所求的表面积为

$$(1) P_x = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 16\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 u du = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

$$(2) P_y = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = 16\pi^2 a^2.$$

(3) 作平移 $x = \bar{x}, y = \bar{y} + 2a$ 则 $\bar{y} = -a(1 + \cos t).$

$$P_z = \left| 2\pi \int_0^{2\pi} [-a(1 + \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt] \right|^{*}) = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

*) 在此取绝对值, 是由于被积函数始终不为正之故.

【2496】 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 绕直线 $y = x$.

解 先求 ds :

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \begin{cases} 3a \sin t \cos t dt, & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ -3a \sin t \cos t dt, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

利用对称性, 并作旋转, 即得所求的表面积为

$$\begin{aligned} P &= 2 \left[2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{y-x}{\sqrt{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{y-x}{\sqrt{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \right] \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (a \sin^3 t - a \cos^3 t) 3a \sin t \cos t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (a \sin^3 t - a \cos^3 t) 3a \sin t \cos t dt \right] \\ &= \frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{5} \sin^5 t + \frac{1}{5} \cos^5 t \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{5} \sin^5 t + \frac{1}{5} \cos^5 t \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \right] \\ &= \frac{3}{5} \pi a^2 (4\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

【2497】 $r = a(1 + \cos \varphi)$, 绕极轴.

解 $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi, y = r \sin \varphi = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi = 4a \cos^3 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}.$

于是, 所求的表面积为

$$P = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8a^2 \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{32}{5} \pi a^2.$$

【2498】 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$: (1) 绕极轴; (2) 绕轴 $\varphi = \frac{\pi}{2}$; (3) 绕轴 $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

解 (1) $y = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi$, $ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi$. 于是, 所求的表面积为

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin \varphi d\varphi = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}).$$

(2) $x = a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi$ ($-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$). 于是, 所求的表面积为

$$P = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2\pi a^2 \sqrt{2}.$$

(3) $x = a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi$, $y = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi$, $ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi$.

注意到在 $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ 内恒有 $x - y \geq 0$, 于是, 所求的表面积为

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = \frac{4\pi a^2}{\sqrt{a}} (\sin \varphi + \cos \varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 4\pi a^2.$$

【2499】 由抛物线 $ay = a^2 - x^2$ 及 Ox 轴围成的图形绕 Ox 轴旋转而构成一旋转体, 求其表面积与等体积球的表面积之比.

解 首先求此旋转体的表面积.

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}}{a},$$

$$\begin{aligned} \text{从而, } P_s &= 2 \cdot 2\pi \int_0^a \left(a - \frac{x^2}{a}\right) \frac{2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}}{a} dx = 8\pi \int_0^a \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} dx - \frac{8\pi}{a^2} \int_0^a x^2 \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} dx \\ &= 8\pi \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a^2}{8} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} \right) \right] \Big|_0^a - \frac{8\pi}{a^2} \left[\frac{x(2x^2 + \frac{a^2}{4})}{8} \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^4}{128} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} \right) \right] \Big|_0^a \\ &= \frac{\pi a^2}{8} \left[7\sqrt{5} + \frac{17}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right]; \end{aligned}$$

其次, 求旋转体的体积.

$$V_s = \pi \int_{-a}^a \left(a - \frac{x^2}{a}\right)^2 dx = \frac{16\pi a^3}{15}.$$

设与其等体积球的半径为 R , 则 $\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{16\pi a^3}{15}$, $R = \sqrt[3]{\frac{4}{5}} a$. 于是, 此球的表面积为

$$P = 4\pi R^2 = 4\pi \sqrt[3]{\frac{16}{25}} a^2 = \frac{8\pi a^2}{5} \sqrt[3]{10}.$$

最后得到

$$\frac{P_s}{P} = \frac{\frac{\pi a^2}{8} \left[7\sqrt{5} + \frac{17}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right]}{\frac{8\pi a^2}{5} \sqrt[3]{10}} = \frac{5[14\sqrt{5} + 17\ln(2 + \sqrt{5})]}{128 \sqrt[3]{10}} \approx 1.013.$$

*) 利用 1820 题的结果.

【2500】 由直线 $x = \frac{p}{2}$ 与抛物线 $y^2 = 2px$ 围成的图形绕直线 $y = p$ 旋转而构成一旋转体, 求其体积和表面积.

解 所求的体积为

$$V_{y=p} = \int_0^{\frac{p}{2}} \pi(p + \sqrt{2px})^2 dx - \int_0^{\frac{p}{2}} \pi(p - \sqrt{2px})^2 dx = 4\pi p \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px} dx = \frac{4}{3}\pi p^3.$$

旋转体的侧面积为

$$\begin{aligned} S_{\text{侧}} &= \int_{(U)} 2\pi(p + \sqrt{2px}) ds + \int_{(U)} 2\pi(p - \sqrt{2px}) ds = 4\pi p \int_{(U)} ds = 4\pi p \int_0^p \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy \\ &= 4\pi \int_0^p \sqrt{y^2 + p^2} dy = 4\pi \left[\frac{y}{2} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 + p^2}) \right] \Big|_0^p \\ &= 2\pi p^2 [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})], \end{aligned}$$

而底面积为

$$S_{\text{底}} = \pi(2p)^2 = 4\pi p^2,$$

于是,所求的表面积为

$$P = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = 2\pi p^2 [(2 + \sqrt{2}) + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

§ 9. 矩的计算法. 质心的坐标

1° 矩 若密度为 $\rho = \rho(y)$ 的质量 M 充满了 Oxy 平面上的某有界连续统 Ω (曲线, 平面的区域), 而 $\omega = \omega(y)$ 为 Ω 中纵坐标不超过 y 的部分的相应度量 (弧长, 面积), 则数

$$M_k = \lim_{\max |\Delta y_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(y_i) y_i^k \Delta \omega(y_i) = \int_{\Omega} \rho y^k d\omega(y) \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

称为质量 M 对于 Ox 轴的 k 次矩.

作为特殊情形, 当 $k=0$ 时得质量 M , 当 $k=1$ 时得静矩, 当 $k=2$ 时得转动惯量.

类似地可定义出质量对于坐标平面的矩.

若 $\rho=1$, 则相应的矩称为几何矩 (线矩, 面积矩, 体积矩等).

2° 质心 均质平面图形 S 的质心的坐标 (x_0, y_0) 可由以下公式来定义:

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中 $M_1^{(y)}, M_1^{(x)}$ 为图形 S 对于 Oy 轴和 Ox 轴的几何静矩.

【2501】 求半径为 a 的半圆弧对于过此弧两端点的直径的静矩和转动惯量.

解 取此直径所在的直线作为 Ox 轴, 圆心作为原点, 则圆的方程为 $x^2 + y^2 = a^2$. 从而,

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{及} \quad ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{a}{y} dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

于是, 所求的静矩和转动惯量* 分别为

$$M_1 = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2a^2,$$

$$M_2 = \int_{-a}^a (a^2 - x^2) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^3}{2}.$$

【2502】 求底为 b , 高为 h 的均质三角形平板对于其底边的静矩和转动惯量 ($\rho=1$).

解 取坐标系如图 4.46 所示.

$$M_1^{(x)} = \frac{1}{2} \int_0^b y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^c y_1^2 dx + \frac{1}{2} \int_c^b y_2^2 dx.$$

* 这里假定 $\rho=1$, 今后有类似情况, 不再说明.

由于 $y_1 = y_1(x) = \frac{h}{c}x$, $y_2 = y_2(x) = \frac{h}{c-b}(x-b)$,

于是, 所求的静矩为

$$M_1^{(x)} = \frac{1}{2} \int_0^c \frac{h^2}{c^2} x^2 dx + \frac{1}{2} \int_c^b \frac{h^2}{(c-b)^2} (x-b)^2 dx = \frac{bh^2}{6}.$$

又由于 $x_1 = x_1(y) = \frac{c}{h}y$, $x_2 = x_2(y) = b + \frac{c-b}{h}y$,

于是, 所求的转动惯量为

$$M_2^{(x)} = \int_0^h y^2 (x_2 - x_1) dy = \int_0^h y^2 \left(b - \frac{b}{h}y\right) dy = \frac{bh^3}{12}.$$

【2503】 求半轴长为 a 和 b 的均质椭圆形平板对其主轴的转动惯量 ($\rho=1$).

解 不妨设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则上、下半椭圆方程为

$$x_1 = -\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}, \quad x_2 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

于是, 所求的转动惯量为

$$\begin{aligned} M_2^{(x)} &= \int_{-b}^b y^2 (x_2 - x_1) dy = 2 \int_{-b}^b \frac{a}{b} y^2 \sqrt{b^2 - y^2} dy \\ &= 4ab^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi ab^3}{4}. \end{aligned}$$

至于 $M_2^{(y)}$, 由对称性知, 只需在 $M_2^{(x)}$ 的结果中将 a, b 对调即得. 所以,

$$M_2^{(y)} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

*) 设 $y = b \sin \varphi$.

【2504】 求底半径为 r 和高为 h 的均质圆锥对其底平面的静矩和转动惯量 ($\rho=1$).

解 取坐标系如图 4.47 所示, 则

$$M_1 = \int_0^h x P(x) dx,$$

其中 $P(x) = \pi y^2 = \pi \left[\frac{r}{h} (h-x) \right]^2$.

于是, 所求的静矩和转动惯量分别为

$$M_1 = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x (h-x)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^2}{12};$$

$$M_2 = \int_0^h x^2 P(x) dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 (h-x)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^3}{30}.$$

【2505】 证明古尔丹第一定理: 平面曲线弧 C 绕此弧所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转面, 其面积等于此弧的长度与它的质心所画出的圆周之长的乘积.

证 质心 (ξ, η) 具有这样的性质, 即如把曲线的全部“质量”都集中到它上面, 则此质量对于任何一个轴的静矩, 都与曲线对此轴的静矩相同. 即

$$\xi s = M_y = \int_0^l x ds, \quad \eta s = M_x = \int_0^l y ds,$$

式中 s 表示弧长. 于是

$$2\pi \eta s = 2\pi \int_0^l y ds.$$

上式右端是弧 C 旋转而成的曲面面积, 左端 $2\pi \eta$ 表示弧 C 绕 Ox 轴旋转时其质心所画出的圆周之长. 从而, 定理得证.

【2506】 证明古尔丹第二定理: 平面图形 S 绕此图形所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转体, 其体积等于图形 S 的面积与此图形的质心所画出的圆周之长的乘积.

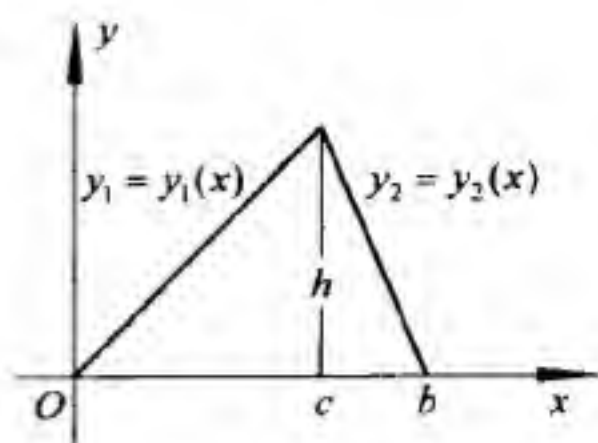


图 4.46

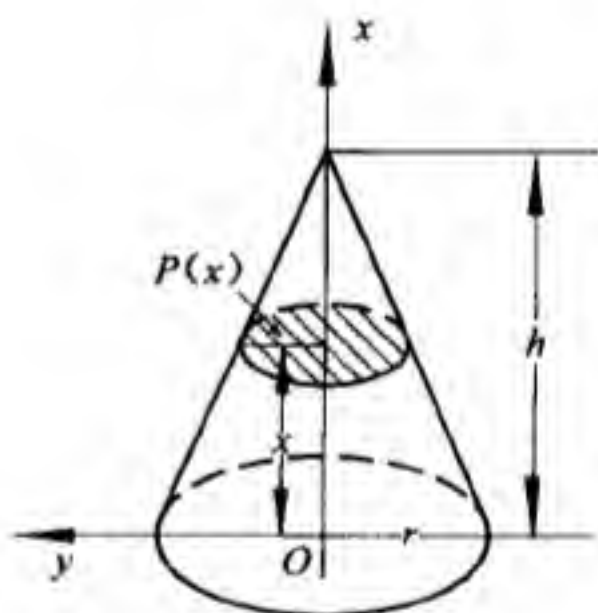


图 4.47

证 由于 $\eta S = M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx$, 所以, $2\pi\eta S = \pi \int_a^b y^2 dx$.

上式右端即为旋转体的体积, 从而, 定理得证.

【2507】 求圆弧 $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ ($|\varphi| \leq a \leq \pi$) 的质心的坐标.

解 显见 $\eta = 0$, 圆弧长 $s = 2a$. 由于

$$M_y = \int_0^s x ds = \int_{-a}^a a^2 \cos \varphi d\varphi = 2a^2 \sin a,$$

所以,

$$\xi = \frac{2a^2 \sin a}{2aa} = \frac{a \sin a}{a}.$$

于是, 所求的质心为 $(\frac{a \sin a}{a}, 0)$.

【2508】 求抛物线: $ax = y^2$, $ay = x^2$ ($a > 0$) 所围图形的质心的坐标.

提示 利用 2506 题及 2397 题的结果, 并注意对称性.

解 利用古尔丹第二定理来解此题. 首先, 此面积为

$$S = \frac{a^2}{3},$$

体积为

$$V = \pi \int_0^a \left(ax - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = \frac{3\pi a^3}{10}.$$

于是, $2\pi\eta \frac{a^2}{3} = \frac{3\pi a^3}{10}$, $\eta = \frac{9a}{20}$. 利用对称性知 $\xi = \eta = \frac{9a}{20}$.

于是, 所求的质心为 $(\frac{9a}{20}, \frac{9a}{20})$.

*) 利用 2397 题的结果.

【2509】 求图形 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) 的质心的坐标.

解 首先, 我们已知第一象限椭圆的面积等于 $\frac{\pi ab}{4}$.

其次, 我们再求椭圆绕 Ox 轴旋转所得的旋转体体积. 因为

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2),$$

所以,

$$V = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi ab^2.$$

按古尔丹第二定理, 我们有 $2\pi\eta \frac{\pi ab}{4} = \frac{2}{3} \pi ab^2$, $\eta = \frac{4b}{3\pi}$. 在结果中间将 a 和 b 对调即得 $\xi = \frac{4a}{3\pi}$.

于是, 所求的质心为 $(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi})$.

【2510】 求半径为 a 的均质半球的质心的坐标.

解 取圆心作为原点, 则球的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

设质心为 (ξ, η, ζ) , 显见 $\xi = \eta = 0$. 而 $V_{\text{半球}} = \frac{2\pi a^3}{3}$. 将圆 $y^2 + z^2 = a^2$ 绕 Oz 轴旋转, 即得球. 又

$$M_1^{(z)} = \int_{(V)} z dV = \pi \int_0^a z y^2 dz = \pi \int_0^a z (a^2 - z^2) dz = \frac{\pi a^4}{4}.$$

最后得到

$$\zeta = \frac{M_1^{(z)}}{V} = \frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}} = \frac{3a}{8}.$$

于是, 所求的质心为 $(0, 0, \frac{3a}{8})$.

【2511】 求对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$)

上由点 $O(-\infty, 0)$ 到点 $P(\varphi, r)$ 的弧 OP 的质心 $C(\varphi_0, r_0)$ 的坐标. 当点 P 移动时, 点 C 画出怎样的曲线?

解 质心的直角坐标为

$$\xi = \frac{\int_{(L)} x ds}{\int_{(L)} ds} = \frac{\int_{-\infty}^{\varphi} r \cos \varphi \sqrt{a^2(1+m^2)} e^{m\varphi} d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{a^2(1+m^2)} e^{m\varphi} d\varphi} = \frac{a \int_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\varphi} \cos \varphi d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\varphi} d\varphi} = \frac{ma e^{m\varphi} (\sin \varphi + 2m \cos \varphi)}{4m^2 + 1}.$$

同法可得
$$\eta = \frac{\int_{(L)} y ds}{\int_{(L)} ds} = \frac{ma e^{m\varphi} (2m \sin \varphi - \cos \varphi)}{4m^2 + 1}.$$

于是,质心的极坐标为

$$r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{ma}{\sqrt{4m^2 + 1}} \sqrt{4m^2 + 1} e^{m\varphi} = \frac{mr}{\sqrt{4m^2 + 1}}, \quad \tan \varphi_0 = \frac{\eta}{\xi} = \frac{2m \tan \varphi - 1}{\tan \varphi + 2m} = \frac{\tan \varphi - \frac{1}{2m}}{1 + \frac{1}{2m} \tan \varphi},$$

即 $\varphi_0 = \varphi - \alpha$, 其中 $\alpha = \arctan \frac{1}{2m}$.

当点 P 移动时,点 $C(\varphi_0, r_0)$ 画出的曲线为

$$r_0 = \frac{ma}{\sqrt{4m^2 + 1}} e^{m\varphi} = \frac{ma}{\sqrt{4m^2 + 1}} e^{m(\varphi_0 + \alpha)},$$

这也是一条对数螺线.

【2512】 求曲线 $r = a(1 + \cos \varphi)$ 所围图形的质心的坐标.

解 计算时,将小扇形的重量集中在其质心 $(\frac{2}{3} r \cos \varphi, \frac{2}{3} r \sin \varphi)$ 处. 由对称性知 $\eta = 0$, 而

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\int_{(L)} x y dx}{\int_{(L)} y dx} = \frac{\frac{2}{3} \int_0^{\pi} r \cos \varphi \frac{1}{2} r^2 d\varphi}{\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\varphi} = \frac{2}{3} \frac{\int_0^{\pi} a^3 (1 + \cos \varphi)^3 \cos \varphi d\varphi}{\int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi} \\ &= \frac{2a}{3} \frac{\int_0^{\pi} (1 + 3\cos \varphi + 3\cos^2 \varphi + \cos^3 \varphi) \cos \varphi d\varphi}{\int_0^{\pi} (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi} = \frac{5a}{6}. \end{aligned}$$

于是,质心的极坐标为 $\varphi_0 = 0, r_0 = \frac{5a}{6}$.

【2513】 求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的第一拱与 Ox 轴所围图形的质心的坐标.

解 由旋转性知 $\xi = \pi a$. 由于面积 $S = 3\pi a^2$ 及图形 S 绕 Ox 轴旋转而成的曲面包围的体积

$$V_x = 5\pi^2 a^3,$$

利用古尔丹第二定理^{***}, 即得质心 (ξ, η) 适合下列关系式

$$2\pi \eta S = V_x \quad \text{或} \quad \eta = \frac{V_x}{2\pi S} = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5a}{6}.$$

于是,所求的质心为 $(\pi a, \frac{5a}{6})$.

*) 利用 2413 题的结果.

**) 利用 2480 题(1)的结果.

***) 参看 2506 题.

【2514】 求图形 $0 \leq x \leq a, y^2 \leq 2px$ 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的质心的坐标.

解 由对称性知 $\eta = 0$. 又

$$\xi = \frac{\int_0^a x \pi y^2 dx}{\int_0^a \pi y^2 dx} = \frac{\int_0^a 2px^2 dx}{\int_0^a 2px dx} = \frac{2}{3} a.$$

于是,所求的质心为 $(\frac{2}{3} a, 0)$.

【2515】 求半球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 的质心的坐标.

解 由对称性知 $\xi = \eta = 0$.

$$\zeta = \frac{\int_0^a z 2\pi x \sqrt{1+x'^2} dz}{\int_0^a 2\pi x \sqrt{1+x'^2} dz} = \frac{\int_0^a 2\pi z \sqrt{a^2 - z^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz}{\int_0^a 2\pi \sqrt{a^2 - z^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz} = \frac{2\pi a \int_0^a z dz}{2\pi a \int_0^a dz} = \frac{2\pi a \frac{1}{2} a^2}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}.$$

于是, 所求的质心为 $(0, 0, \frac{a}{2})$.

*) 在此是将 $x^2 + z^2 = a^2$ 绕 Oz 轴旋转而得半球面.

§ 10. 力学和物理学中的问题

组成适当的积分和并求出其极限, 以便求解下列问题:

【2516】 杆的长度 $l = 10\text{m}$, 若该杆的线密度按规律 $\delta = 6 + 0.3x \text{ kg/m}$ 而变, 其中 x 为到杆的一个端点的距离, 求杆的质量.

解 将杆 n 等分, 每份的长 $\Delta x = \frac{10}{n}$, 把每小段近似地看成是均质的, 并以右端点的密度作为小段的密度.

这样, 便得到杆的质量 M 的近似值, 即 $M \approx \sum_{i=1}^n (6 + 0.3 \frac{10}{n} i) \frac{10}{n}$, 显然, n 愈大愈近似.

于是, 杆的质量为

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (6 + 0.3 \frac{10}{n} i) \frac{10}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [60 + \frac{15(n+1)}{n}] = 75 \text{ kg}.$$

【2517】 把质量为 m 的物体从地球(其半径为 R) 表面抬升到高度为 h 的地方, 需要对它作多大的功? 若物体远离至无穷远处, 则功等于多少?

解 由牛顿万有引力定律

$$f = k \frac{mM}{r^2},$$

其中 M 为地球的质量, r 为物体离开地球中心的距离, k 为比例常数. 将 h 分成 n 等份, 在每份上把引力近似地看作是不变的, 在第 i 份上取

$$r_i = \sqrt{\left[\frac{h}{n}(i-1) + R\right] \left[\frac{h}{n}i + R\right]},$$

则力

$$f_i = k \frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1) + R\right] \left[\frac{h}{n}i + R\right]}.$$

于是, 所要作的功为

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(k \frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1) + R\right] \left[\frac{h}{n}i + R\right]} \cdot \frac{h}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} kmMn \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{h(i-1) + nR} - \frac{1}{hi + nR} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} kmMn \left[\frac{1}{nR} - \frac{1}{n(R+h)} \right] = \frac{kmMh}{(R+h)R}. \end{aligned}$$

其中 g 为重力加速度, $k = \frac{gR^2}{M}$ 为引力常数. 若物体远离至无穷远处, 则功为

$$A_{\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} W = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{kmMh}{(R+h)R} = mgR.$$

【2518】 若 10N 的力能使弹簧伸长 1cm , 现在要使这弹簧伸长 10cm , 问需要作多少功?

提示 利用胡克定律

解 由胡克定律知, 弹性恢复力 F 与伸长量 x 成正比, 即 $F = kx$. 由条件知: $k = 10$. 因而, $F = 10x$.

现将 10cm n 等分, 每份上恢复力的大小近似地看作是不变的, 并取右端点来作和, 即得功 W 的近似值为

$$W \approx \sum_{i=1}^n \frac{10}{n} i \cdot \frac{10^2}{n}.$$

显然, n 愈大愈近似. 于是, 所要求的功为

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{10}{n} i \cdot \frac{10^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 500 \frac{n+1}{n} = 500(\text{N} \cdot \text{cm}) = 5(\text{N} \cdot \text{m}) = 5\text{J}.$$

【2519】 直径 20cm , 长 80cm 的圆柱形汽缸充满压强为 100N/cm^2 的蒸汽. 假定蒸汽的温度保持不变, 要使其体积减小一半, 需要作多少功?

解 由玻意耳—马略特定律有 $pV=C$, 其中 p 表示气体的压强, V 表示体积, C 为常量. 由条件知, 常量

$$C = 10 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 80 = 8000\pi(\text{N} \cdot \text{m}).$$

设初始时气体体积为 V_0 , 将区间 $\left[\frac{V_0}{2}, V_0\right]$ 分成 n 个小区间, 分点依次为

$$\frac{V_0}{2}, \frac{V_0}{2}q, \frac{V_0}{2}q^2, \dots, \frac{V_0}{2}q^i, \dots, \frac{V_0}{2}q^n = V_0,$$

其中 $q = \sqrt[n]{\frac{V_0}{\frac{V_0}{2}}} = \sqrt[n]{2}$. 由于气体体积从 $\frac{V_0}{2}q^{i+1}$ 减小至 $\frac{V_0}{2}q^i$ 需要花费功的近似值为

$$C\left(\frac{V_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{V_0}{2}q^{i+1} - \frac{V_0}{2}q^i\right).$$

于是, 所要求的功为

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n C\left(\frac{V_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{V_0}{2}q^{i+1} - \frac{V_0}{2}q^i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Cn(\sqrt[n]{2} - 1) = C\ln 2^{**} = 8000\pi\ln 2 \approx 17420\text{J}.$$

*) 利用 541 题的结果.

【2520】 求水对于垂直壁上的压力, 这壁的形状为半圆形, 半径为 a 且其直径位于水的表面上.

解 为求出水对半圆形的压力, 只要计算出作用于四分之一圆上的压力, 然后再把它两倍起来. 现将四分之一圆等分成 n 个圆心角为 $\Delta\theta$ 的小扇形(图 4.48). 作用于该小扇形上的压力的近似值为

$$\frac{1}{2}a^2\Delta\theta \cdot \frac{2}{3}a\sin\theta_i,$$

其中 $\Delta\theta = \frac{\pi}{2n}$, $\theta_i = \frac{i\pi}{2n}$. 于是, 作用于半圆上的压力为

$$P = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2}{3}a\sin \frac{i\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{2a^3}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sin \frac{i\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{2a^3}{3}^{**}.$$

*) 利用 2187 题的结果.

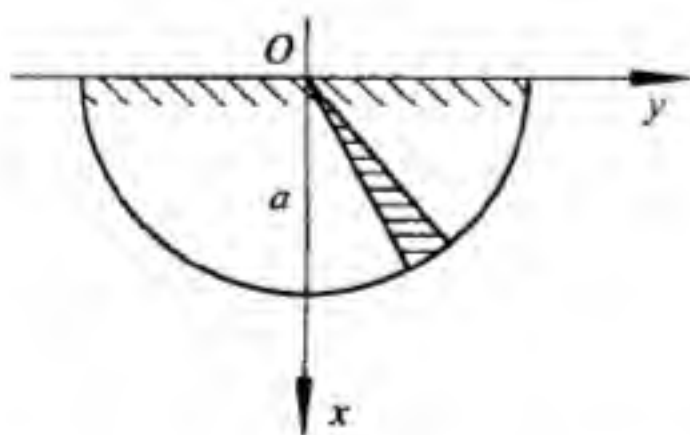


图 4.48

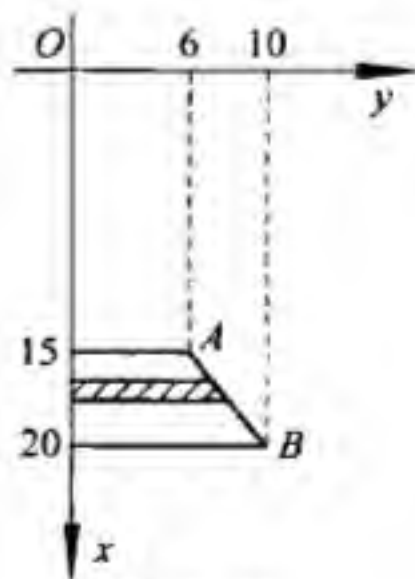


图 4.49

【2521】 求水对于垂直壁上的压力, 这壁的形状为梯形, 其下底 $a=10\text{m}$, 上底 $b=6\text{m}$, 高 $h=5\text{m}$, 下底沉没于水面下的距离为 $c=20\text{m}$.

解 取坐标系如图 4.49 所示, AB 所满足的方程为

$$y = \frac{4}{5}x - 6.$$

将区间 $[15, 20]$ n 等分, 每份长 $\Delta x = \frac{5}{n}$. 对应于 Δx 的小条上所受的压力的近似值为

$$\left[\frac{4}{5} \left(15 + \frac{5i}{n} \right) - 6 \right] \left(15 + \frac{5i}{n} \right) \frac{5}{n}.$$

于是, 所要求的压力为

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{4}{5} \left(15 + \frac{5i}{n} \right) - 6 \right] \left(15 + \frac{5i}{n} \right) \frac{5}{n} = 708 \frac{1}{3} (\text{T}).$$

*) 仿照 2185 题和 2518 题的作法.

写出微分方程并解下列问题:

【2522】一质点运动的速度按规律:

$$v = v_0 + at \quad (v_0 = \text{常数}, a = \text{常数})$$

变化, 问在闭间隔 $[0, T]$ 内此质点经过怎样的路程?

解 设路程为 s , 则由导数的力学意义知

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 + at,$$

即 dt 时间内经历的路程为

$$ds = (v_0 + at) dt,$$

于是, 所经过的路程为

$$s = \int_0^T (v_0 + at) dt = v_0 T + \frac{1}{2} a T^2.$$

【2523】半径为 R 而密度为 δ 的均质球体以角速度 ω 绕其直径旋转, 求此球的动能.

解 已知半径为 R 质量为 M 的盘绕垂直盘心的轴的转动惯量为 $\frac{1}{2} MR^2$. 不妨设球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

则考察以 dz 为厚度的垂直于 z 轴的圆盘, 其转动惯量为

$$dJ_z = \frac{1}{2} \pi (R^2 - z^2) \delta (R^2 - z^2) dz = \frac{1}{2} \pi \delta (R^2 - z^2)^2 dz.$$

从而, 球体的转动惯量为

$$J_z = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \pi \delta (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15} \pi \delta R^5.$$

于是, 球的动能为

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{4}{15} \pi \delta \omega^2 R^5.$$

注 原题误为球壳, 现根据答案予以改正.

【2524】线密度 μ_0 为常数的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 质量为 m 的质点?

解 取坐标系如图 4.50 所示, $|AO| = a$. 设引力在坐标轴上的投影为 F_x 和 F_y . 由于

$$dF_y = k \frac{m \mu_0 dx}{a^2 + x^2} \cos \varphi = - \frac{k m \mu_0 a}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

于是,

$$\begin{aligned} F_y &= -2k m \mu_0 a \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -2k m \mu_0 a \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{2k m \mu_0}{a}. \end{aligned}$$

由对称性知, $F_x = 0$. 事实上, 我们有

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k m \mu_0 \sin \varphi}{a^2 + x^2} dx = k m \mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = 0.$$

其中 k 为引力常数. 由上述分析知, 引力指向 y 轴的负向.

【2525】计算半径为 a 且面密度 δ_0 为常数的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P , 此质点位于通过薄板中心 Q 且垂直于薄板平面的直线上, 距离 PQ 等于 b .

解 取坐标系如图 4.51 所示. 显然, 引力指向 y 轴的正向. 对于以 x 为半径的圆环, 其质量为 $dm =$

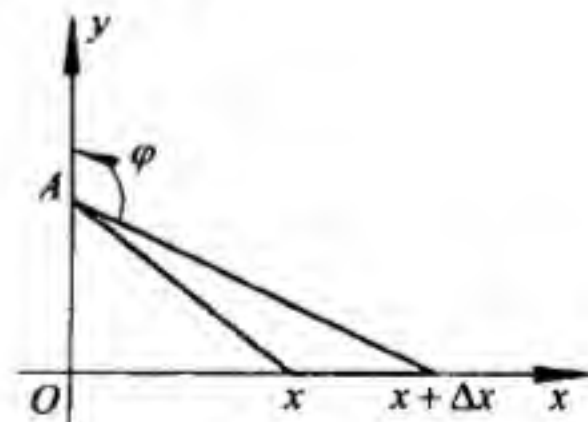


图 4.50

$\delta_0 2\pi x dx$, 对质点 P 的引力为

$$dF_y = 2km\delta_0 \pi \frac{\cos\theta}{b^2+x^2} dx = 2km\delta_0 \pi \frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

于是, 所要求的引力为

$$F_y = 2km\delta_0 \pi \int_0^a \frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = 2km\delta_0 \pi \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

【2526】 根据托里拆利定律, 液体通过小孔从容器中流出的速度等于

$$v = c \sqrt{2gh},$$

式中 g 为重力加速度, h 为液体表面在小孔以上之高度, $c=0.6$ 为实验系数.

直径为 $D=1\text{m}$ 及高为 $H=2\text{m}$ 的直立圆柱形大桶, 其底部有一个直径为 $d=1\text{cm}$ 的圆孔, 问此桶充满液体后经过多长时间, 方可完全排空?

解 取坐标系如图 4.52 所示. 对于 dt 时间, 从圆孔流出的液体体积

$$dV = 0.15\pi \sqrt{2gx} dt,$$

而桶内液体体积的减少量为 $dV = -\pi(50)^2 dx$, 其中 x 随时间 t 的增大而减小, 流出的量应等于桶内减少的量, 于是,

$$-0.15\pi \sqrt{2gx} dt = \pi(50)^2 dx.$$

积分, 得

$$\int_0^t dt = - \int_{200}^x \frac{2500}{0.15 \sqrt{2gx}} dx,$$

即

$$t = -33333 \frac{1}{\sqrt{2g}} (\sqrt{x} - \sqrt{200}),$$

其中 $g=980\text{cm/s}^2$. 当 $x=0$ 时, t 表示水流完所需的时间. 因而所要求的时间为

$$t = \frac{33333 \sqrt{200}}{\sqrt{2 \times 980}} = 10648(\text{s}) \approx 3(\text{h}).$$

【2527】 旋转体的容器应当具有什么形状, 才能使液体从容器底部流出时, 液体表面的下降是均匀的?

解 取坐标系如图 4.53 所示. 不妨设流出孔的半径为单位 cm . 仿上题分析,

得

$$\pi x^2 dy = -\pi v dt = -\pi c \sqrt{2gy} dt,$$

即

$$dy = -c \sqrt{2g} \frac{\sqrt{y}}{x^2} dt.$$

其中 c 为实验系数, g 为重力加速度.

由题意知 $\frac{dy}{dt} = -c \sqrt{2g} \frac{\sqrt{y}}{x^2}$ 应等于常数 k , 即

$$-c \sqrt{2g} \frac{\sqrt{y}}{x^2} = k,$$

于是 $y=Cx^4$, 其中 C 为常数. 所以, 容器应当是把曲线 $y=Cx^4$ 绕铅直轴 Oy 旋转而得的曲面所构成的.

【2528】 镭在每一时刻的衰变速度与其现存的数量成正比, 设镭的数量在初始时刻 $t=0$ 有镭 Q_0 , 经过时间 $T=1600$ 年它的量减少了一半, 求镭的衰变规律.

解 设 Q 为现存的数量, 按题设有 $\frac{dQ}{dt} = kQ$, 其中 k 为比例系数, 即 $\frac{dQ}{Q} = k dt$,

两端积分

$$\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}} \frac{dQ}{Q} = \int_0^{1600} k dt,$$

从而,

$$k = -\frac{\ln 2}{1600}.$$

于是,

$$\int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = -\frac{\ln 2}{1600} \int_0^t dt, \quad \ln \frac{Q}{Q_0} = \ln 2 \cdot \frac{t}{1600}$$

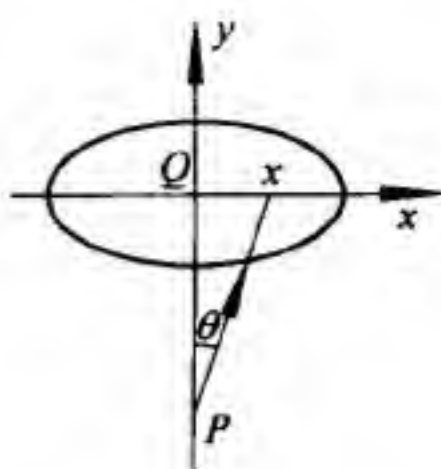


图 4.51

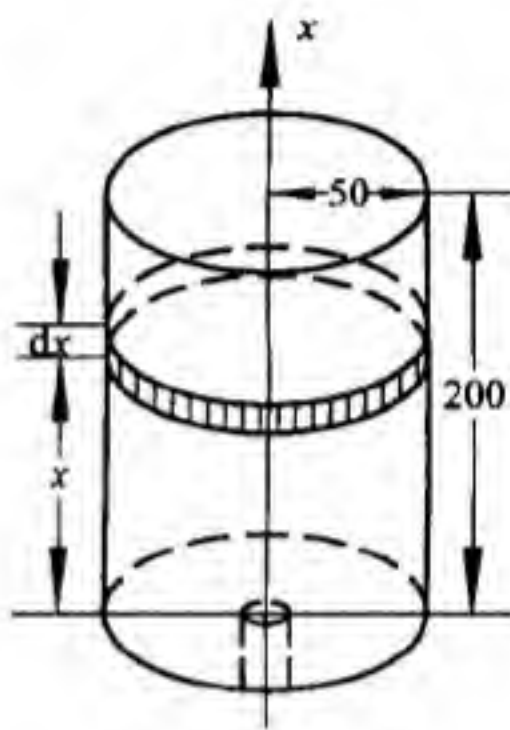


图 4.52

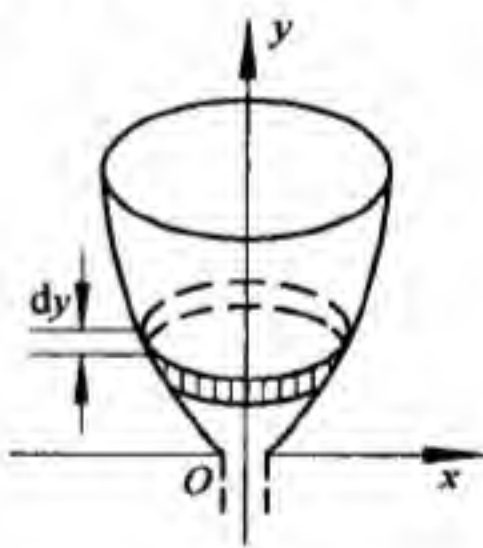


图 4.53

所以, 镭的衰变规律为 $Q=Q_0 2^{-\frac{t}{1600}}$.

【2529】⁺ 在一种把物质 A 变为物质 B 的二阶化学反应中, 反应速度与此二物质浓度之积成正比. 若在 $t=0\text{min}$ 时在容器中有 20% 的物质 B, 而当 $t=15\text{min}$ 时其浓度变成 80%. 问在 $t=1\text{h}$ 时其浓度如何?

解 设 x 为生成物 B 的浓度, 按题设有 $\frac{dx}{dt}=kx(1-x)$,

其中 k 为比例常数, 即

$$\frac{dx}{x(1-x)}=kdt.$$

两端积分

$$\int_{0.2}^{0.8} \frac{dx}{x(1-x)} = \int_0^{15} kdt,$$

从而,

$$k=\frac{1}{15}\ln 16.$$

于是, $\int_{0.2}^x \frac{dx}{x(1-x)} = \int_0^t kdt = \frac{t}{15}\ln 16$, 即 $t=\frac{15}{\ln 16}\ln \frac{4x}{1-x}$.

以 $t=60$ 代入上式, 得

$$x=\frac{16^4}{16^4+4}=99.99\%.$$

所以, 经过 $t=1\text{h}$ 在容器中所含有的物质 B 之浓度为 99.99%.

【2530】 根据胡克定律, 杆的相对伸长 ϵ 与相应横断面上的应力 σ 成正比, 即

$$\epsilon=\frac{\sigma}{E},$$

式中 E 为杨氏模量.

求圆锥形杆在自重作用下的伸长量, 此锥形的顶向下而底固定, 设底半径等于 R , 圆锥的高为 H , 密度为 ρ .

解 取坐标系如图 4.54 所示.

设 $z=h$ 截面处, 对于高度为 dh 的锥体伸长为 dl , 则有

$$\epsilon=\frac{dl}{dh}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2(H-h)\rho g}{\pi r^2 E}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(H-h)}{E}\rho g,$$

即 $dl=\frac{1}{3}\cdot\frac{(H-h)}{E}\rho g dh$. 于是, 圆锥形杆总的伸长量为

$$l=\int_0^H \frac{1}{3}\cdot\frac{(H-h)\rho g}{E}dh=\frac{\rho g H^2}{6E}.$$

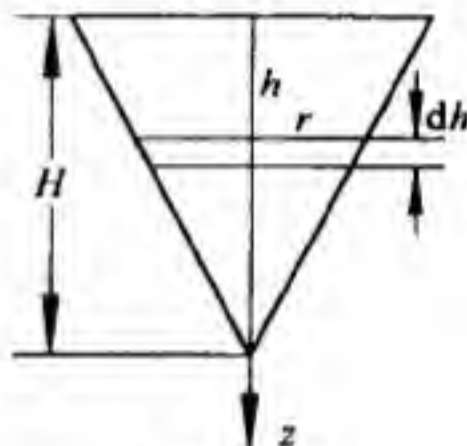


图 4.54

§ 11. 定积分的近似算法

1° 矩形公式 若函数 $y=y(x)$ 在有限的闭区间 $[a, b]$ 上连续且充分多次可微, 并且 $h=\frac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$ ($i=0, 1, \dots, n$), $y_i=y(x_i)$, 则 $\int_a^b y(x)dx=h(y_0+y_1+\dots+y_{n-1})+R_n$,

式中

$$R_n=\frac{(b-a)^2}{2n}y'(\xi) \quad (a\leq\xi\leq b).$$

2° 梯形公式 在相同的记号下, 有

$$\int_a^b y(x)dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

式中

$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi) \quad (a\leq\xi\leq b).$$

3° 抛物线公式(辛普森公式) 命 $n=2k$, 得:

$$\int_a^b y(x)dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\dots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\dots+y_{2k-2})]+R_n,$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

【2531】 利用矩形公式($n=12$), 近似地计算 $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$ 并把结果同精确答案进行比较.

解 $h = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 0; & x_1 &= \frac{\pi}{6}, & y_1 &= \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} = 0.2618; \\ x_2 &= \frac{\pi}{3}, & y_2 &= \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} = 0.9069; & x_3 &= \frac{\pi}{2}, & y_3 &= \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 1.5708; \\ x_4 &= \frac{2\pi}{3}, & y_4 &= \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = 1.8138; & x_5 &= \frac{5\pi}{6}, & y_5 &= \frac{5\pi}{6} \sin \frac{5\pi}{6} = 1.3090; \\ x_6 &= \pi, & y_6 &= \pi \sin \pi = 0; & x_7 &= \frac{7\pi}{6}, & y_7 &= \frac{7\pi}{6} \sin \frac{7\pi}{6} = -1.8326; \\ x_8 &= \frac{4\pi}{3}, & y_8 &= \frac{4\pi}{3} \sin \frac{4\pi}{3} = -3.6276; & x_9 &= \frac{3\pi}{2}, & y_9 &= \frac{3\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2} = -4.7124; \\ x_{10} &= \frac{5\pi}{3}, & y_{10} &= \frac{5\pi}{3} \sin \frac{5\pi}{3} = -4.5345; & x_{11} &= \frac{11\pi}{6}, & y_{11} &= \frac{11\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{6} = -2.8798. \end{aligned}$$

按矩形公式, 得

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx \approx \frac{\pi}{6} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}) \approx -6.1390.$$

实际上, $\int_0^{2\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x dx \approx -6.2832$.

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差:

【2532】 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8).$

解 $h = \frac{1}{8} = 0.125$.

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 1; & \frac{y_0 + y_8}{2} &= 0.75, \\ x_8 &= 1, & y_8 &= 0.5; \\ x_1 &= \frac{1}{8} = 0.125, & y_1 &= 0.88889; \\ x_2 &= 0.25, & y_2 &= 0.8; \\ x_3 &= 0.375, & y_3 &= 0.72727; \\ x_4 &= 0.5, & y_4 &= 0.66667; \\ x_5 &= 0.625, & y_5 &= 0.61538; \\ x_6 &= 0.75, & y_6 &= 0.57143; \\ x_7 &= 0.875, & y_7 &= 0.53333 \quad (+ \\ & & \sum_{i=1}^7 y_i &= 4.80297. \end{aligned}$$

按梯形公式, 得

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx h \left(\frac{y_0 + y_8}{2} + \sum_{i=1}^7 y_i \right) = 0.125(0.75 + 4.80297) \approx 0.69412,$$

误差为

$$|R_n| = \left| \frac{1}{12 \times 8^2} \cdot \frac{2}{(1+\xi)^3} \right| \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

于是,

$$|R_n| \leq \frac{2}{12 \times 8^2} < 0.0027 = 2.7 \times 10^{-3}$$

实际上,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0.69315.$$

【2533】 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \quad (n=12).$

解 $h = \frac{1}{12} = 0.08333.$

$x_0 = 0, \quad y_0 = 1;$

$x_{12} = 1, \quad y_{12} = \frac{1}{2} = 0.5; \quad \frac{y_0 + y_{12}}{2} = 0.75,$

$x_1 = \frac{1}{12}, \quad y_1 = 0.99942; \quad x_2 = \frac{1}{6}, \quad y_2 = 0.99539;$

$x_3 = \frac{1}{4}, \quad y_3 = 0.98462; \quad x_4 = \frac{1}{3}, \quad y_4 = 0.96429;$

$x_5 = \frac{5}{12}, \quad y_5 = 0.93254; \quad x_6 = \frac{1}{2}, \quad y_6 = 0.88889;$

$x_7 = \frac{7}{12}, \quad y_7 = 0.83438; \quad x_8 = \frac{2}{3}, \quad y_8 = 0.77143;$

$x_9 = \frac{3}{4}, \quad y_9 = 0.70330; \quad x_{10} = \frac{5}{6}, \quad y_{10} = 0.63343;$

$x_{11} = \frac{11}{12}, \quad y_{11} = 0.56489 \quad (+$

$\sum_{i=1}^{11} y_i = 9.27258.$

按梯形公式,得

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \approx h \left(\frac{y_0 + y_{12}}{2} + \sum_{i=1}^{11} y_i \right) = 0.08333(0.75 + 9.27258) \approx 0.83518,$

误差为 $|R_n| = \left| \frac{1}{12 \times 12^2} \cdot \frac{12\xi^4 - 6\xi}{(1+\xi^3)^3} \right| \quad (0 \leq \xi \leq 1).$

利用求极值的方法,估计得 $\left| \frac{12\xi^4 - 6\xi}{(1+\xi^3)^3} \right|$ 在 $[0, 1]$ 上不超过 2. 于是,

$|R_n| \leq \frac{2}{12 \times 12^2} < 0.00116 = 1.16 \times 10^{-3}.$

实际上, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]^{*}) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.83565.$

*) 利用 1881 题的结果.

【2534】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} dx \quad (n=6).$

解 $h = \frac{\pi}{12} = 0.2618,$

$x_0 = 0, \quad y_0 = 1;$

$x_6 = \frac{\pi}{2}, \quad y_6 = 0.8660; \quad \frac{y_0 + y_6}{2} = 0.9330,$

$x_1 = \frac{\pi}{12}, \quad y_1 = 0.9916; \quad x_2 = \frac{\pi}{6}, \quad y_2 = 0.9682;$

$x_3 = \frac{\pi}{4}, \quad y_3 = 0.9354; \quad x_4 = \frac{\pi}{3}, \quad y_4 = 0.9014;$

$x_5 = \frac{5\pi}{12}, \quad y_5 = 0.8756 \quad (+$

$\sum_{i=1}^5 y_i = 4.6722.$

按梯形公式,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} \, dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_6}{2} + \sum_{i=1}^5 y_i \right) = 0.2618(0.9330 + 4.6722) \approx 1.4674.$$

误差为

$$|R_n| = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12 \cdot 6^2} |y''(\xi)|,$$

式中 $y = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x}$, $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$. 利用 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq 1$ 及 $y^2 = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 x$, 依次求导可得 $|y''| \leq \frac{\sqrt{3}}{6}$. 于是,

$$|R_n| \leq \frac{\pi^3}{8 \times 12 \times 6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} < 2.59 \times 10^{-3}.$$

利用辛普森公式计算下列积分:

【2535】 $\int_1^9 \sqrt{x} \, dx \quad (n=4).$

解 $h=2$.

$$\begin{array}{llll} x_0=1, & y_0=1, & x_1=3, & y_1=\sqrt{3}=1.732; \\ x_2=5, & y_2=\sqrt{5}=2.236; & x_3=7, & y_3=\sqrt{7}=2.646; \\ x_4=9, & y_4=3. & & \end{array}$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned} \int_1^9 \sqrt{x} \, dx &\approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] \\ &= \frac{2}{3} [4 + 4(1.732 + 2.646) + 2(2.236)] \approx 17.323. \end{aligned}$$

实际上, $\int_1^9 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = \frac{52}{3} \approx 17.333.$

【2536】 $\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} \, dx \quad (n=6).$

解 $h = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{array}{ll} x_0=0, & y_0=2; \\ x_1=\frac{\pi}{6}, & y_1=\sqrt{3+\cos \frac{\pi}{6}}=\sqrt{3.866}=1.966; \\ x_2=\frac{\pi}{3}, & y_2=\sqrt{3+\cos \frac{\pi}{3}}=\sqrt{3.5}=1.871; \\ x_3=\frac{\pi}{2}, & y_3=\sqrt{3+\cos \frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}=1.732; \\ x_4=\frac{2\pi}{3}, & y_4=\sqrt{3+\cos \frac{2\pi}{3}}=\sqrt{2.5}=1.581; \\ x_5=\frac{5\pi}{6}, & y_5=\sqrt{3+\cos \frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2.134}=1.461; \\ x_6=\pi, & y_6=\sqrt{3+\cos \pi}=\sqrt{2}=1.414. \end{array}$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} \, dx &\approx \frac{\pi}{18} [(2 + 1.414) + 4(1.966 + 1.732 + 1.461) + 2(1.871 + 1.581)] \\ &\approx 5.4025. \end{aligned}$$

【2537】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx \quad (n=10).$

解 $h = \frac{\pi}{20}$.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0, & y_0 &= 1; & x_1 &= \frac{\pi}{20}, & y_1 &= \frac{20}{\pi} \sin \frac{\pi}{20} = 0.99589; \\
x_2 &= \frac{\pi}{10}, & y_2 &= \frac{10}{\pi} \sin \frac{\pi}{10} = 0.98363; & x_3 &= \frac{3\pi}{20}, & y_3 &= \frac{20}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{20} = 0.96340; \\
x_4 &= \frac{\pi}{5}, & y_4 &= \frac{5}{\pi} \sin \frac{\pi}{5} = 0.93549; & x_5 &= \frac{\pi}{4}, & y_5 &= \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} = 0.90032; \\
x_6 &= \frac{3\pi}{10}, & y_6 &= \frac{10}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{10} = 0.85839; & x_7 &= \frac{7\pi}{20}, & y_7 &= \frac{20}{7\pi} \sin \frac{7\pi}{20} = 0.81033; \\
x_8 &= \frac{2\pi}{5}, & y_8 &= \frac{5}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{5} = 0.75683; & x_9 &= \frac{9\pi}{20}, & y_9 &= \frac{20}{9\pi} \sin \frac{9\pi}{20} = 0.69865; \\
x_{10} &= \frac{\pi}{2}, & y_{10} &= \frac{2}{\pi} = 0.63662.
\end{aligned}$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx &\approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] \\
&= \frac{\pi}{60} [(1 + 0.63662) + 4(0.99589 + 0.96340 + 0.90032 + 0.81033 + 0.69865) \\
&\quad + 2(0.98363 + 0.93549 + 0.85839 + 0.75683)] \\
&\approx 1.37076.
\end{aligned}$$

【2538】 $\int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} \quad (n=6).$

解 $h = \frac{1}{6}.$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0, & y_0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1; & x_1 &= \frac{1}{6}, & y_1 &= 1.0812 \\
x_2 &= \frac{1}{3}, & y_2 &= 1.1587; & x_3 &= \frac{1}{2}, & y_3 &= 1.2332; \\
x_4 &= \frac{2}{3}, & y_4 &= 1.3051; & x_5 &= \frac{5}{6}, & y_5 &= 1.3748; \\
x_6 &= 1, & y_6 &= 1.4427.
\end{aligned}$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} &\approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] \\
&= \frac{1}{18} [(1 + 1.4427) + 4(1.0812 + 1.2332 + 1.3748) + 2(1.1587 + 1.3051)] \\
&\approx 1.2293.
\end{aligned}$$

【2539】 取 $n=10$, 计算卡塔兰常数. $G = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx.$

解 $h = \frac{1}{10}.$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0, & y_0 &= 1; & x_1 &= 0.1, & y_1 &= 0.99669; \\
x_2 &= 0.2, & y_2 &= 0.98698; & x_3 &= 0.3, & y_3 &= 0.97152; \\
x_4 &= 0.4, & y_4 &= 0.95127; & x_5 &= 0.5, & y_5 &= 0.92730; \\
x_6 &= 0.6, & y_6 &= 0.90070; & x_7 &= 0.7, & y_7 &= 0.87247; \\
x_8 &= 0.8, & y_8 &= 0.84343; & x_9 &= 0.9, & y_9 &= 0.81424; \\
x_{10} &= 1, & y_{10} &= 0.78540.
\end{aligned}$$

按辛普森公式,得

$$G \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)]$$

$$= \frac{1}{30}(1.78540 + 18.32888 + 7.36476) \\ \approx 0.91597.$$

【2540】 利用公式 $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 计算数 π , 精确到 10^{-5} .

解 利用辛普森公式计算其误差

$$R_n(x) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

现在 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 事实上, 它是 $y = \arctan x$ 的导数, 因而,

$$f^{(4)}(x) = (\arctan x)^{(5)}.$$

利用第二章 1218 题的结果得知

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} \sin\left(5\arctan \frac{1}{x}\right).$$

在区间 $[0, 1]$ 上, $|f^{(4)}(x)| \leq 24$, 所以,

$$|R_n(x)| \leq \frac{24}{180n^4}.$$

要误差小于 0.00001, 只要

$$\frac{24}{180n^4} < \frac{1}{100000},$$

即只要取 $n=12$, 就有 $|R_n| \leq 6.5 \times 10^{-6}$.

其次, 我们还取加进近似于函数值的误差, 设法使这个新的误差小于 3.5×10^{-6} , 这样, 就能保证总误差小于 10^{-5} . 为了这个目的, 只要计算 $\frac{1}{1+x^2}$ 的值到六位小数精确到 0.5×10^{-6} 就够了.

现取 $n=12$, 则有

$x_0 = 0,$	$y_0 = 1;$	$x_1 = \frac{1}{12},$	$y_1 = 0.993103;$
$x_2 = \frac{1}{6},$	$y_2 = 0.972973;$	$x_3 = \frac{1}{4},$	$y_3 = 0.941176;$
$x_4 = \frac{1}{3},$	$y_4 = 0.900000;$	$x_5 = \frac{5}{12},$	$y_5 = 0.852071;$
$x_6 = \frac{1}{2},$	$y_6 = 0.800000;$	$x_7 = \frac{7}{12},$	$y_7 = 0.746114;$
$x_8 = \frac{2}{3},$	$y_8 = 0.692308;$	$x_9 = \frac{3}{4},$	$y_9 = 0.640000;$
$x_{10} = \frac{5}{6},$	$y_{10} = 0.590164;$	$x_{11} = \frac{11}{12},$	$y_{11} = 0.543396;$
$x_{12} = 1,$	$y_{12} = 0.500000.$		

最后得到

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{36} [(y_0 + y_{12}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})] \\ = 0.785398,$$

所以,

$$\pi \approx 0.785398 \times 4 = 3.14159,$$

精确到 0.00001.

【2541】 计算 $\int_0^1 e^{x^2} dx$, 精确到 0.001.

解 采用辛普森公式计算, 则其误差为

$$R_n(x) = -\frac{1}{180n^4} 2e^{\xi^2} (8\xi^4 + 24\xi^2 + 6) \quad (0 < \xi < 1),$$

故有

$$|R_n(x)| < \frac{1}{180n^4} 2e \cdot 38.$$

要 $|R_n(x)| < 10^{-3}$, 只要 $\frac{2 \cdot 38e^1}{180n^4} < 10^{-3}$, 即只要取 $n=6$.

现取 $n=6$, 则有

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 1 & x_1 &= \frac{1}{6}, & y_1 &= e^{\frac{1}{6}} = 1.0282; \\ x_2 &= \frac{1}{3}, & y_2 &= e^{\frac{1}{3}} = 1.1175; & x_3 &= \frac{1}{2}, & y_3 &= e^{\frac{1}{2}} = 1.2840 \\ x_4 &= \frac{2}{3}, & y_4 &= e^{\frac{2}{3}} = 1.5596; & x_5 &= \frac{5}{6}, & y_5 &= e^{\frac{5}{6}} = 2.0026; \\ x_6 &= 1, & y_6 &= e = 2.7183. \end{aligned}$$

于是,

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{1}{18} [(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] \approx 1.463.$$

【2542】 计算 $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$, 精确到 10^{-4} .

解 对于函数 $f(x) = e^x$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上采用泰勒展开式以及相应的拉格朗日余项公式来计算误差:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \Delta_{n+1},$$

其中

$$\Delta_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

于是,

$$|\Delta_{n+1}| \leq \frac{e}{(n+1)!} x^{n+1},$$

从而, 原来的积分数值为

$$I = \int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k \ln \frac{1}{x} dx + R_{n+1},$$

其中

$$|R_{n+1}| = \left| \int_0^1 \Delta_{n+1} \ln \frac{1}{x} dx \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} \int_0^1 x^{n+1} \ln \frac{1}{x} dx.$$

记 $I_k = \int_0^1 x^k \ln \frac{1}{x} dx$ ($k \geq 1$), 则有

$$I_k = \frac{1}{k+1} \int_0^1 \ln \frac{1}{x} d(x^{k+1}) = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln \frac{1}{x} \Big|_0^1 + \frac{1}{k+1} \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

如果取 $n=5$, 则有

$$|R_6| \leq \frac{e}{6!} I_6 = \frac{e}{6!} \cdot \frac{1}{7^2} = \frac{e}{7 \times 7!} = \frac{e}{35280} < \frac{3}{35280} < \frac{1}{1.1 \times 10^4} < 10^{-4}.$$

记 $I = J + R_6$, 则有

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k!} I_k = \sum_{k=1}^5 \left[\frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(k+1)^2} \right] = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{(k+1)! (k+1)} \\ &= \frac{1}{2! \cdot 2} + \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{4! \cdot 4} + \frac{1}{5! \cdot 5} + \frac{1}{6! \cdot 6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{4320} \\ &= 0.31787^+ = 0.3179 + \Delta', \end{aligned}$$

其中 $|\Delta'| \leq 0.00004 = 4 \times 10^{-5}$, 且 $\Delta' < 0$.

注意到由 $\Delta_{n+1} > 0$ 即可推知 $R_{n+1} > 0$. 于是,

$$I = J + R_6 = 0.3179 + (R_6 + \Delta') = 0.3179 + (R_6 - |\Delta'|) = 0.3179 + \Delta,$$

且有 $I \approx 0.3179$, 而此时其相应的误差已有

$$|\Delta| = |R_6 - |\Delta'|| \leq \begin{cases} R_6, & \text{若 } |\Delta'| \leq R_6, \\ |\Delta'|, & \text{若 } |\Delta'| > R_6 \end{cases} \leq \max(R_6, |\Delta'|) < 10^{-4}.$$

注 本题不能直接利用辛普森公式来计算所给的定积分的近似值, 因为被积函数 $(e^x - 1) \ln \frac{1}{x}$ 的四阶导数在 $x=0$ 的右近旁是无界的, 从而不能估计出误差. 所以, 上面我们用泰勒公式来作近似计算. 这样, 计算以及估计误差都较为简单. 当然, 也可间接地利用辛普森公式来计算所给定积分的近似值, 这时需要或者改变被积函数或者把积分区域分成两个. 例如, 我们可以改变被积函数如下: 令

$$I = \int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx = - \int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx,$$

设 $f(x) = (e^x - 1) \ln x$, 若补充定义 $f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$,

则 $f(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数. 由于

$$f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x - 1}{x} = f(x) + \frac{e^x - 1}{x} + \ln x \quad (0 < x \leq 1),$$

故

$$\int_0^1 f'(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx + \int_0^1 \ln x dx.$$

注意到

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = 0, \quad \int_0^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1,$$

得

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx - 1.$$

于是, 我们把求 $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ 的近似值问题, 归结为求 $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ 的近似值问题. 令 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, 并补充定义

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow +0} g(x) = 1,$$

则 $g(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数. 由求高阶导数的莱布尼茨法则, 易得

$$g^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x) - (-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad (0 < x \leq 1),$$

其中

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k k! x^{n-k} \quad (n=1, 2, \dots).$$

下面证明 $g^{(n)}(0)$ 存在并且 $g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$). 首先, 由洛必达法则, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow +0} g^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x P_n(x) - (-1)^n n!}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x [P_n(x) + P'_n(x)]}{(n+1)x^n} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x x^n}{(n+1)x^n} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, \dots).$$

于是, 根据中值定理, 得

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\xi \rightarrow +0} g'(\xi) = \frac{1}{2} \quad (0 < \xi < x).$$

今假定 $g^{(n)}(0)$ 存在且 $g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$. 于是,

$$g^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{\eta \rightarrow +0} g^{(n+1)}(\eta) = \frac{1}{n+2} \quad (0 < \eta < x).$$

根据数学归纳法, 知 $g^{(n)}(0)$ 存在且 $g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$).

由此又知 $g^{(n)}(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数 ($n=1, 2, \dots$). 令 $h(x) = e^x P_n(x) - (-1)^n n!$. 由于

$$h'(x) = e^x [P_n(x) + P'_n(x)] = e^x x^n > 0 \quad (0 < x \leq 1),$$

故 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是递增的, 从而,

$$h(x) > h(0) = 0 \quad (0 < x \leq 1).$$

因此, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $g^{(n)}(x) > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 故 $g^{(n-1)}(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的严格增函数 ($n=1, 2, \dots$). 特别地, $g^{(1)}(x)$ 当然是 $0 \leq x \leq 1$ 上的严格增函数. 于是, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 恒有

$$\frac{1}{5} = g^{(4)}(0) \leq g^{(4)}(x) \leq g^{(4)}(1).$$

由于当 $0 < x \leq 1$ 时,

$$g^{(4)}(x) = \frac{e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) - 24}{x^5},$$

故 $g^{(4)}(1) = 9e - 24 < 0.5$. 因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$0.2 \leq g^{(4)}(x) \leq 0.5.$$

代入辛普森公式的误差表达式, 得

$$|R_n(x)| = \left| -\frac{g^{(4)}(\xi'')}{180n^4} \right| \leq \frac{1}{360n^4}, \quad R_n(x) < 0.$$

取 $n=4$, 有

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{360n^4} < 1.1 \times 10^{-5}.$$

计算得

$$g(0)=1, \quad g\left(\frac{1}{4}\right)=1.13610, \quad g\left(\frac{1}{2}\right)=1.29744, \quad g\left(\frac{3}{4}\right)=1.48933, \quad g(1)=1.71828.$$

于是, 代入后最终得

$$I = \int_0^1 g(x) dx - 1 \approx \frac{1}{12} \left\{ g(0) + g(1) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + 4 \left[g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) \right] \right\} - 1 = 1.3179 - 1 = 0.3179,$$

其误差的绝对值显然小于 $0.0001 = 10^{-4}$.

也可不改变被积函数, 而把积分区间分成两个, 步骤如下:

令 $u = \frac{1-x}{x}$ ($0 < x < 1$), 则 $\frac{1}{x} = 1 + u$ ($u > 0$). 于是, 当 $0 < x < 1$ 时, 有

$$0 < (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} = (e^x - 1) \ln(1 + u) < (e^x - 1)u = \frac{1-x}{x}(e^x - 1) < \frac{e^x - 1}{x}.$$

前面已证函数 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上是严格增大的 (注意, 规定 $g(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$), 故当 $0 < x < 1$ 时, 有

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < g(1) = e - 1 < 2,$$

从而,

$$0 < \int_0^{10^{-5}} (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx < \int_0^{10^{-5}} \frac{e^x - 1}{x} dx < 2 \int_0^{10^{-5}} dx = 0.2 \times 10^{-4}.$$

求出函数 $(e^x - 1) \ln \frac{1}{x}$ 的四阶导数的表达式后, 易知它在闭区间 $10^{-5} \leq x \leq 1$ 上是连续的, 从而是有界的, 并且不难估计出其绝对值的上界. 因此, 可利用辛普森公式计算积分

$$\int_{10^{-5}}^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$$

的近似值, 使误差的绝对值小于 0.8×10^{-4} . 显然, 若以此作为积分 $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ 的近似值, 则其误差的绝对值小于 10^{-4} . 由于计算较繁, 从略.

【2543】 近似地计算概率积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

解 作变换 $x = \frac{t}{1-t}$, 则积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \frac{1}{(1-t)^2} dt$.

由于题中对精确度未提出明确要求, 故 n 可任取. 例如, 取 $n=2k=18$, $\Delta t = \frac{1}{18}$, 则有

$$\begin{array}{llll} t_0 = 0, & y_0 = 1; & t_1 = \frac{1}{18}, & 4y_1 = 4.46894; \\ t_2 = \frac{1}{9}, & 2y_2 = 2.49201; & t_3 = \frac{1}{6}, & 4y_3 = 5.53415; \end{array}$$

$$\begin{aligned}
t_4 &= \frac{2}{9}, & 2y_4 &= 3.04696; & t_5 &= \frac{5}{18}, & 4y_5 &= 6.61414 \\
t_6 &= \frac{1}{3}, & 2y_6 &= 3.50460; & t_7 &= \frac{7}{18}, & 4y_7 &= 7.14411; \\
t_8 &= \frac{4}{9}, & 2y_8 &= 3.41685; & t_9 &= \frac{1}{2}, & 4y_9 &= 5.88607; \\
t_{10} &= \frac{5}{9}, & 2y_{10} &= 2.12232; & t_{11} &= \frac{11}{18}, & 4y_{11} &= 2.23855; \\
t_{12} &= \frac{2}{3}, & 2y_{12} &= 0.32968; & t_{13} &= \frac{13}{18}, & 4y_{13} &= 0.06009; \\
t_{14} &= \frac{7}{9}, & 2y_{14} &= 0.00010; & t_{15} &= \frac{5}{6}, & 4y_{15} &= 0; \\
t_{16} &= \frac{8}{9}, & 2y_{16} &= 0; & t_{17} &= \frac{17}{18}, & 4y_{17} &= 0; \\
t_{18} &= 1, & y_{18} &= \lim_{t \rightarrow 1} e^{-(\frac{1}{1-t})^2} \left(\frac{1}{1-t} \right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \int_0^1 e^{-(\frac{t}{1-t})^2} \frac{1}{(1-t)^2} dt \\
&\approx \frac{1}{54} (1 + 4.46894 + 2.49201 + 5.53415 + 3.04696 + 6.61414 + 3.50460 + 7.14411 + \\
&\quad 3.41685 + 5.88607 + 2.12232 + 2.23855 + 0.32968 + 0.06009 + 0.00010) \\
&= \frac{47.85857}{54} \approx 0.88627.
\end{aligned}$$

【2544】 近似地求出半轴为 $a=10$ 及 $b=6$ 的椭圆的周长.

解 设椭圆的参数方程为

$$x = 10 \cos t, \quad y = 6 \sin t.$$

于是有

$$ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = 10 \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt,$$

从而得椭圆的周长为

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = 40 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt.$$

现取 $n=2k=6$ 近似计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt.$$

注意到 $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, $\sin^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, $h = \frac{\pi}{12}$, 即有

$$t_0 = 0, \quad y_0 = 1;$$

$$t_1 = \frac{\pi}{12}, \quad 4y_1 = 4 \sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{4} (2-\sqrt{3})} = 3.913;$$

$$t_2 = \frac{\pi}{6}, \quad 2y_2 = 2 \sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{4}} = 1.833;$$

$$t_3 = \frac{\pi}{4}, \quad 4y_3 = 4 \sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{2}} = 3.293;$$

$$t_4 = \frac{\pi}{3}, \quad 2y_4 = 2 \sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{3}{4}} = 1.442;$$

$$t_5 = \frac{5\pi}{12}, \quad 4y_5 = 4 \sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{4} (2+\sqrt{3})} = 2.539;$$

$$t_6 = \frac{\pi}{2}, \quad y_6 = 4 \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 0.6.$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt &\approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] \\ &= \frac{\pi}{36} (1 + 0.6 + 3.913 + 3.293 + 2.539 + 1.833 + 1.442) \\ &\approx 1.276,\end{aligned}$$

所以,椭圆周长的近似值为 $s = 40 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt \approx 40 \times 1.276 = 51.04$.

【2545】 取 $\Delta x = \frac{\pi}{3}$, 描点作出函数 $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的图像.

解 取 $n = 2k = 6$ 计算函数 $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 的值. 先计算 $y = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt$. 由于 $h = \frac{\pi}{18}$, 且

$$\begin{aligned}t_0 = 0, \quad y_0 = 1; \quad t_1 = \frac{\pi}{18}, \quad 4y_1 = 3.980; \quad t_2 = \frac{\pi}{9}, \quad 2y_2 = 1.960; \\ t_3 = \frac{\pi}{6}, \quad 4y_3 = 3.820; \quad t_4 = \frac{2\pi}{9}, \quad 2y_4 = 1.841; \quad t_5 = \frac{5\pi}{18}, \quad 4y_5 = 3.511; \\ t_6 = \frac{\pi}{3}, \quad y_6 = 0.827.\end{aligned}$$

按辛普森公式,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \approx \frac{\pi}{54} (1 + 0.827 + 3.980 + 3.820 + 3.511 + 1.960 + 1.841) \approx 0.99.$$

再计算 $y = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt$. 由于 $h = \frac{\pi}{9}$, 且

$$\begin{aligned}t_0 = 0, \quad y_0 = 1; \quad t_1 = \frac{\pi}{9}, \quad 4y_1 = 3.919; \quad t_2 = \frac{2\pi}{9}, \quad 2y_2 = 1.841; \\ t_3 = \frac{\pi}{3}, \quad 4y_3 = 3.308; \quad t_4 = \frac{4\pi}{9}, \quad 2y_4 = 1.411; \quad t_5 = \frac{5\pi}{9}, \quad 4y_5 = 2.257; \\ t_6 = \frac{2\pi}{3}, \quad y_6 = 0.413.\end{aligned}$$

所以,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \approx \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \approx 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.72, \quad \int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.52, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

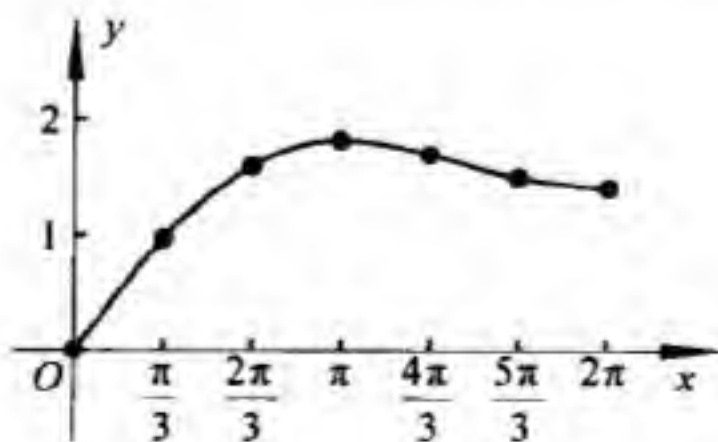


图 4.55